Ответы на вопросы экзамена по матанализу

Евгений Мангасарян

6 декабря 2021

22 Вопрос

Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций.

Определение 22.1 (непрерывной функции в точке)**.** Пусть $D(f) = X$, $x_0 \in X$ – предельная точка множества X. Функция f непрерывная в точке x, если выполняется одно из эквивалентных условий:

1. $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ (по Коши).
2. $\forall O(f(x_0))\ \exists O(x_0) :\ f(O(x_0)) \subset O(f(x_0))$ (по Коши).
3. $\forall (x_n) :\ x_n \to x_0\ f(x_n) \to f(x_0)$ (по Гейне).
4. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
5. $f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая в точке x_0 функция.

Теорема 22.1. Пусть f и g непрерывны в точке x_0. Тогда

1. $af + bg$ непрерывна в точке x_0, $a, b \in \mathbb{R}$.
2. fg непрерывна в точке x_0.
3. $\frac{f}{g}$ непрерывна в точке x_0, если $g(x_0) \neq 0$.
4. если $f(x_0) \neq 0$, то $\exists O(x_0)\ \forall x \in O(x_0)\ f(x)f(x_0) > 0$ (функция сохраняет знак).
5. f ограничена в некоторой окрестности точки x_0 (f локально ограничена).

23 Вопрос

Непрерывность функции на множестве. *Теорема Коши об обращении функции в нуль и теорема Коши о промежуточных значениях функции.

Определение 23.1 (непрерывной на множестве функции)**.** Функция называется непрерывной на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Функцию называют непрерывной, если она непрерывна на всей области определения.

Теорема 23.1 (Коши об обращении функции в нуль)**.** Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$. Тогда

$$\exists c \in [a, b]: \ f(c) = 0.$$

Доказательство. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Если $f(x_1) = 0$, то все доказано. Если нет, то из двух отрезков $[a, x_1]$, $[x_1, b]$ рассмотрим тот, на концах которого функция принимает значения разных знаков. Переобозначим его $[a_1, b_1]$.

С отрезком $[a_1, b_1]$ поступаем аналогично. Если в процессе деления отрезков мы так и не получим нужную точку, в которой функция обращается в нуль, то образуется стягивающаяся последовательность отрезков $([a_n, b_n])$. Пусть x_0 – их общая точка. Тогда по лемме о стягивающейся последовательности отрезков $a_n \to x_0$ и $b_n \to x_0$. По определению Гейне непрерывности функции в точке $f(a_n) \to f(x_0)$, $f(b_n) \to f(x_0)$. $f(a_n)f(b_n) < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) = f^2(x_0) \leq 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$. □

Теорема 23.2 (Коши о промежуточном значении функции)**.** Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$ и C – любое число, промежуточное между A и B. Тогда

$$\exists c \in [a, b]: \ f(c) = C$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - C$. $g(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $(A-C)(B-C) < 0$. Тогда по теореме Коши об обращении функции в нуль $\exists c \in [a, b]: \ g(c) = 0$ или $f(c) - C = 0 \Leftrightarrow f(c) = C$. □

24 Вопрос

Компакт. *Критерий компактности.

Определение 24.1 (компакта)**.** Множество $X \subset \mathbb{R}$ называют компактом, если $\forall (x_n)$ точек множества X содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in X$.

Пример 24.1 (компакта)**.** Отрезок $[a, b]$ множества $\mathbb{R}$.

Определение 24.2 (замкнутого множества)**.** Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Определение 24.3 (внутренней точки)**.** Точка $x \in X$ называется внутренней точкой множества, если $\exists O(x) \subset X$.

Определение 24.4 (открытого множества)**.** Множество называется открытым, если все его точки являются внутренними.

Пример 24.2. Отрезок $[a,b]$ – замкнутое множество. Интервал (a,b) – открытое множество.

Доказательство. От противного. Пусть компакт X не ограничен. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in X\ |x_n| > n$. Очевидно, что любая подпоследовательность последовательности (x_n) неограничена, а следовательно не сходится. Это противоречит компактности множества. □

Теорема 24.1 (критерий компактности)**.** Множество является компактом $\Leftrightarrow$ множество ограничено и замкнуто.

Доказательство.
$\Rightarrow$. Пусть X – компакт. По теореме об ограниченности компакта X ограничено. Осталось доказать замкнутость.

Пусть x_0 – предельная точка множества X. Тогда $\exists (x_n):\ x_n \to x_0 \in X,\ x_n \neq x_0$. Согласно компактности множества $\exists (x_{n_k}):\ x_{n_k} \to x_0' \in X$. С другой стороны, т.к. $x_n \to x_0$, то $x_{n_k} \to x_0$. $x_0 = x_0' \in X$.
$\Leftarrow$. Пусть X ограничено и замкнуто, а (x_n) – последовательность точек этого множества.

$x_n = O(1)$. По теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists (x_{n_k})\ :\ x_{n_k} \to x_0$. Если x_0 совпадает с каким-либо членом x_{n_k}, то $x_0 \in X$ автоматически. Если нет, то x_0 – предельная точка множества X. В силу замкнутости множества $x_0 \in X$. $x_{n_k} \to x_0 \in X \Rightarrow X$ – компакт. □

25 Вопрос

*Теорема о непрерывном образе компакта. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса.

Теорема 25.1 (о непрерывном образе компакта)**.** Пусть функция f непрерывна на X и X – компакт. Тогда $Y = f(X)$ тоже компакт.

Доказательство. Пусть (y_n) – последовательность точек множества $Y = f(X)$, (x_n) – последовательность точек множества X такая, что $\forall n \in \mathbb{N}\ f(x_n) = y_n$.

X – компакт $\Rightarrow \exists (x_{n_k}) \to x_0 \in X$ при $n \to \infty$. В силу непрерывности функции в точке x_0 $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x_0) = y_0 \in Y$. Это означает, что Y – компакт. □

Следствие 25.1 (первая теорема Вейерштрасса)**.** Если функция непрерывна на компакте, то она ограничена на нем.

Следствие 25.2 (вторая теорема Вейерштрасса)**.** Если функция непрерывна на компакте, то она принимает на нем свои наименьшие и наибольшие значения.

26 Вопрос

Равномерная непрерывность функции на множестве и *теорема Кантора.

Определение 26.1 (равномерно непрерывной функции)**.** Функция f называется равномерно непрерывной на множестве X, если

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0\ \forall x \in X\ \forall x' \in X\ (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon).$$

Теорема 26.1 (Кантора)**.** Пусть f непрерывна на X и X – компакт. Тогда f равномерно непрерывна на X.

Доказательство. От противного. Пусть f непрерывна на X, но не равномерно непрерывна. Тогда

$$\exists \epsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0 \exists x', x'' \in X\ (|x' - x''| < \delta \wedge |f(x') - f(x'')| \geq \epsilon_0).$$

Возьмем последовательность $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ найдем x', x'' такие, что

$$|x'_n - x''_n| < \delta_n \wedge |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \epsilon_0.$$

Так как X – компакт, то $\exists x'_{n_k} \to x_0 \in X$ и $\exists x''_{n_k} \to x_0 \in X$.

В силу непрерывности f имеем:

$$f(x'_{n_k}) \to f(x_0),\ \ f(x''_{n_k}) \to f(x_0).$$

Следовательно, $f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k}) \to 0$, что противоречит условию $|f(x') - f(x'')| \geq \epsilon_0 > 0$. □

27 Вопрос

Односторонние пределы. Точки разрыва функции и их классификация. Теорема об односторонних пределах монотонной функции.

Определение 27.1 (левостороннего предела)**.**

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \Leftrightarrow$$

По Коши:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall x \in X\ (x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon)$$

По Гейне:

$$\forall (x_n) :\ x_n \to x_0 \text{ при } n \to \infty,\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n < x_0 \text{ выполняется } f(x_n) \to A$$

Определение 27.2 (правостороннего предела)**.**

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \Leftrightarrow$$

По Коши:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall x \in X\ (x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon)$$

По Гейне:

$$\forall (x_n) :\ x_n \to x_0 \text{ при } n \to \infty,\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n > x_0 \text{ выполняется } f(x_n) \to A$$

Определение 27.3 (точки устранимого разрыва)**.** Пусть f определена в окрестностях точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0. Точка x_0 называется точкой устранимого разрыва, если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но

- либо f не определена в точке x_0,
- либо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Определение 27.4 (точки разрыва первого рода)**.** Точка разрыва называется точкой разрыва первого рода, если $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0}, \lim\limits_{x\to x_0+0} \in \mathbb{R}$, но $\lim\limits_{x\to x_0-0} \neq \lim\limits_{x\to x_0+0}$.

Определение 27.5 (точки разрыва второго рода)**.** Точка разрыва называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

Теорема 27.1 (об односторонних пределах монотонной функции)**.** Пусть f монотонна на (a, b). Тогда в каждой точке интервала у нее существуют односторонние пределы. Более того, $\forall x_0 \in (a, b)$ справедливо,

- если $f \uparrow$:
$$f(x_0 - 0) = \sup_{x<x_0} f(x),\ f(x_0 + 0) = \inf_{x>x_0} f(x)$$
$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0).$$
- если $f \downarrow$:
$$f(x_0 - 0) = \inf_{x<x_0} f(x),\ f(x_0 + 0) = \sup_{x>x_0} f(x)$$
$$f(x_0 + 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 - 0).$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $f \uparrow$. Докажем, что $f(x_0 - 0) = \sup\limits_{x<x_0} f(x)$.

Множество $\{f(x) :\ x < x_0\}$ ограничено сверху, $f(x_0)$ – одна из его мажорант. Поэтому $\exists \sup\limits_{x<x_0} f(x) = l$, причем $l \leq f(x_0)$. По определению верхней грани:

1. $\forall x < x_0\ f(x) \leq l$,
2. $\forall \epsilon > 0\ \exists x_\epsilon < x_0\ f(x_\epsilon) > l - \epsilon$.

В силу того, что $f \uparrow$:

$$l - \epsilon < f(x_\epsilon) \leq f(x) \leq l < l + \epsilon.$$

Следовательно,
$$l = \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

$\square$

28 Вопрос

Критерий непрерывности монотонной функции. Теорема о непрерывности обратной функции.

Теорема 28.1 (критерий непрерывности монотонной функции)**.** Пусть функция f монотонна на отрезке $[a, b]$. Тогда функция f непрерывна $\Leftrightarrow$ $f([a, b])$ есть отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$.

Теорема 28.2 (о непрерывности обратной функции)**.** Пусть f строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда существует обратная функция строго монотонная того же типа, определенная и непрерывная на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$.

29 Вопрос

Дифференцируемость функции в точке, производная функции в точке. *Непрерывность дифференцируемой функции. *Теорема о дифференцируемости композиции.

Определение 29.1 (дифференцируемости функции в точке)**.** Пусть f определена на X и $x_0 \in X$ – предельная точка множества X. Функцию f называют дифференцируемой в точке x_0, если найдется непрерывная в точке x_0 функция A такая, что $\forall x \in X$ выполняется равенство

$$f(x) - f(x_0) = A(x)(x - x_0).$$

Производной функции f в точке x_0 назовем значение $A(x_0)$ и обозначим символом $f'(x_0) = A(x_0)$.

A непрерывна, а поэтому $\lim\limits_{x \to x_0} A(x) = A(x_0)$. Или $A(x) = A(x_0) + o(1)$ при $x \to x_0$. Поэтому справедливо следующее равенство:

$$f(x) = f(x_0) + A(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ при } x \to x_0.$$

Теорема 29.1 (о непрерывности дифференцируемой функции)**.** Если функция f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Записав определение

$$f(x) - f(x_0) = A(x)(x - x_0),$$

где $A(x)$ – непрерывная в точке x_0 функция, и воспользовавшись теоремой об арифметических действиях над непрерывными функциями, убеждаемся, что функция $f(x)$ непрерывна. □

Теорема 29.2 (о дифференцируемости композиции)**.** Если функция g дифференцируема в точке x_0, а функция f дифференцируема в точке $y_0 = g(x_0)$, то функция $f \circ g$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0).$$

Или $(f(g(x_0)))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Доказательство. Согласно определению дифференцируемости имеем:

$$f(y) - f(y_0) = A(y)(y - y_0),\ g(x) - g(x_0) = B(x)(x - x_0),$$

где $A(y)$ непрерывна в точке y_0, $B(x)$ непрерывна в точке x_0. Причем

$$f'(y_0) = A(y_0),\ g'(x_0) = B(x_0).$$

Рассмотрим приращение функции $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0) = f(g(x)) - f(g(x_0)).$$

Обозначив $y = g(x)$ имеем:

$$f(y) - f(y_0) = A(y)(y - y_0) = A(g(x))(g(x) - g(x_0)) = (A \circ g)(x) \cdot B(x)(x - x_0).$$

Пусть $C(x) = (A \circ g)(x)B(x)$. g дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow$ непрерывна в точке x_0, A непрерывна в точке $y_0 = g(x_0)$. В силу теоремы о непрерывности композиции функция $A \circ g$ непрерывна в точке x_0. $B(x)$ непрерывна в точке x_0, поэтому произведение $(A \circ g)(x)B(x)$ также непрерывно в точке x_0.

Итак, имеем равенство

$$(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0) = C(x)(x - x_0),$$

где $f \circ g$ дифференцируеам в точке x_0 и ее производная равна

$$(f \circ g)'(x_0) = C(x_0) = A(g(x_0))B(x_0) = f'(y_0)g'(x_0).$$

□

30 Вопрос

Теорема об арифметических действиях над дифференцируемыми функциями.

Теорема 30.1 (об арифметических действиях над дифференцируемыми функциями)**.** Пусть f и g дифференцируемы в точке x_0. Тогда функции $f + g$, fg и $\frac{f}{g}$ при дополнительном условии, что g в нуль не обращается, дифференцируемы в точке x_0.

Причем справедливы равенства:

1. $(f(x_0) + g(x_0))' = f'(x_0) + g'(x_0)$,
2. $(f(x_0)g(x_0))' = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$,
3. $\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Доказательство. По определению дифференцируемости

$$f(x) - f(x_0) = A(x)(x - x_0),\ g(x) - g(x_0) = B(x)(x - x_0),$$

$A(x),\ B(x)$ непрерывны в точке x_0, $f'(x_0) = A(x_0),\ g'(x_0) = B(x_0)$.

1. $(f+g)(x)-(f+g)(x_0) = (f(x)-f(x_0)) + (g(x)-g(x_0)) = A(x)(x-x_0) + B(x)(x-x_0) = (A(x)+B(x))(x-x_0)$. $A(x)+B(x)$ непрерывна в точке $x_0 \Rightarrow (f(x_0)+g(x_0))' = A(x_0)+B(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$.

2. Рассмотрим произведение fg.

$$f(x)g(x) = (f(x_0)+A(x)(x-x_0))(g(x_0)+B(x)(x-x_0)) =$$
$$f(x_0)g(x_0) + f(x_0)B(x)(x-x_0) + g(x_0)A(x)(x-x_0) + A(x)B(x)(x-x_0)^2 =$$
$$f(x_0)g(x_0) + (f(x_0)B(x) + g(x_0)A(x) + A(x)B(x)(x-x_0))(x-x_0)$$

   Пусть $C(x) = f(x_0)B(x) + g(x_0)A(x) + A(x)B(x)(x-x_0)$. Она непрерывна в точке $x_0 \Rightarrow fg$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(fg)'(x_0) = C(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0).$$

3. Перепишем $\frac{f}{g} = f\left(\frac{1}{g}\right)$. Из теоремы о производной композиции следует, что $\frac{1}{g}$ дифференцируема в точке x_0, поэтому

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

   Осталось воспользоваться доказанным утверждением относительно производной произведения и получить равенство

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

□

31 Вопрос

*Теорема о дифференцируемости обратной функции.

Теорема 31.1 (о дифференцируемости обратной функции)**.** Пусть функция f обратима (взаимно однозначна), существует производная $f'(x_0) \neq 0$, и обратная функция f^{-1} непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда f^{-1} дифференцируема в точке y_0 и

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Для f по определению

$$f(x) - f(x_0) = A(x)(x-x_0),$$

$A(x)$ непрерывна в точке x_0, $A(x_0) = f'(x_0) \neq 0$. В силу обратимости функции f $\forall x \neq x_0$ $A(x) \neq 0$.

Используя соотношения

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \text{ и } y_0 = f(x_0)$$

имеем

$$y - y_0 = A(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)),$$

или

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \frac{1}{A(f^{-1}(y))}(y - y_0).$$

$A \circ f^{-1}$ непрерывна в точке y_0, поэтому

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{(A \circ f^{-1})(y_0)} = \frac{1}{A(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

32 Вопрос

Точки роста и убывания функции. *Достаточное условие точек роста и точек убывания.

Определение 32.1. Точка x_0 называется точкой роста функции f, если

$$\exists O(x_0)\ \forall x \in O(x_0)\ sign(f(x) - f(x_0)) = sign(x - x_0).$$

Точка x_0 называется точкой убывания функции f, если

$$\exists O(x_0)\ \forall x \in O(x_0)\ sign(f(x) - f(x_0)) = -sign(x - x_0).$$

Теорема 32.1 (достаточное условие точек роста и точек убывания)**.** Пусть f дифференцируема в точке x_0. Если $f'(x_0) > 0$, то точка x_0 является точкой роста функции f. Если $f'(x_0) < 0$, то точка x_0 является точкой убывания функции f.

Доказательство. Согласно определению дифференцируемости функции f в точке x_0:

$$f(x) - f(x_0) = A(x)(x - x_0),$$

где $A(x)$ – непрерывная в точке x_0 функция, $A(x_0) = f'(x_0)$.

Если $A(x_0) > 0$, то

$$\exists O(x_0)\ \forall x \in O(x_0)\ A(x) > 0.$$

Тогда $\forall x \in O(x_0)$

$$sign(f(x) - f(x_0)) = sign(A(x)(x - x_0)) = sign(x - x_0),$$

то есть точка x_0 является точкой роста.

Если $A(x_0) < 0$, то

$$\exists O(x_0)\ \forall x \in O(x_0)\ A(x) < 0.$$

$$\forall x \in O(x_0)\ sign(f(x) - f(x_0)) = sign(A(x)(x - x_0)) = -sign(x - x_0)$$

что означает, что точка x_0 является точкой убывания функции f. □

33 Вопрос

Точки локального экстремума. *Теорема Ферма.

Определение 33.1 (точки локального экстремума)**.** Пусть точка x_0 является внутренней точкой области определения функции f.

Точка x_0 является точкой локального максимума функции f, если

$$\exists O(x_0)\ \forall x \in O(x_0)\ f(x) \leq f(x_0).$$

Точка x_0 является точкой локального минимума функции f, если

$$\exists O(x_0)\ \forall x \in O(x_0)\ f(x) \geq f(x_0).$$

Точки локального минимума и максимума называются точками локального экстремума. Если неравенство получается строгим, то говорят о строгом локальном экстремуме.

Теорема 33.1 (Ферма, **необходимое** условие локального экстремума)**.** Пусть точка x_0 является точкой локального экстремума функции f и $\exists f'(x_0)$. Тогда

$$f'(x_0) = 0.$$

Доказательство. Точка x_0 не может быть точкой роста функции f, так как является локальным экстремумом. Тогда по теореме о достаточном условии точек роста и точек убывания $f'(x_0) \leq 0$. Но точка x_0 также не может быть точкой убывания функции f. поэтому $f'(x_0) \geq 0$. Одновременное выполнение этих условий дает равенство

$$f'(x_0) = 0.$$

$\square$

34 Вопрос

*Теорема Ролля.

Теорема 34.1 (Ролля)**.** Пусть f непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогда

$$\exists c \in (a, b)\ f'(c) = 0.$$

Доказательство. В случае, когда $f \equiv const$, $\forall x \in (a, b)\ f'(x_0) = 0$.

Пусть теперь $f \not\equiv const$.

В силу второй теоремы Вейерштрасса функция f, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимет на нем свои наименьшее и наибольшее значения.

Пусть наименьшее функция принимает в точке x_1, а наибольшее в точке x_2. По крайней мере одна из этих точек не совпадает с концами отрезка $\Rightarrow$ является внутренней точкой, а значит локальным экстремумом. Обозначим эту точку c. Согласно теореме Ферма

$$f'(c) = 0.$$

$\square$

35 Вопрос

*Теоремы Коши и Лагранжа. Следствия теоремы Лагранжа.

Теорема 35.1 (Коши, обобщенная формула конечных приращений)**.** Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b) и $\forall x \in (a, b)\ g'(x) \neq 0$. Тогда

$$\exists c \in (a, b)\ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. В силу теоремы Ролля $g(b) \neq g(a)$. Рассмотрим функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

F непрерывна на $[a, b]$ *(1)*, дифференцируема на (a, b) *(2)*.

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(a) - g(a)) = 0,$$
$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(a)) = 0,$$

значит $F(a) = F(b)$ *(3)*.

Исходя из трех полученных условий, можем применить теорему Ролля:

$$\exists c \in (a, b)\ F'(c) = 0.$$

Поэтому

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

□

Теорема 35.2 (Лагранжа, формула конечных приращений)**.** Пусть f непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b). Тогда

$$\exists c \in (a, b)\ f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Доказательство. Эта теорема является частным случаем теоремы Коши при $g(x) = x$. Очевидно, что $g(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $\forall x \in (a, b)\ g'(x) = 1$.

Применяя теорему Коши, получаем

$$\exists c \in (a, b)\ f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

□

Следствие 35.1 (теорема о постоянстве дифференцируемой функции)**.** Пусть $\forall x \in (a,b)$ $f'(x) = 0$. Тогда

$$f \equiv const \text{ на } (a,b).$$

Следствие 35.2 (критерий монотонности дифференцируемой функции)**.** Пусть f дифференцируема на интервале (a,b). Тогда

$$f \uparrow \Leftrightarrow \forall x \in (a,b)\ f'(x) \geq 0,$$
$$f \downarrow \Leftrightarrow \forall x \in (a,b)\ f'(x) \leq 0.$$

Следствие 35.3 (**достаточное** условие строгой монотонности функции)**.**
Если $\forall x \in (a,b)$ $f'(x) > 0$, то $f \uparrow\uparrow$.
Если $\forall x \in (a,b)$ $f'(x) < 0$, то $f \downarrow\downarrow$.

36 Вопрос

Производные высших порядков. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Формула Тейлора-Пеано.

Определение 36.1 (производной высшего порядка)**.** Пусть f дифференцируема в $O(x_0)$. Тогда в точках $O(x_0)$ определена функция f'.

Если функция f' дифференцируема в точке x_0, то говорят, что функция f дважды дифференцируема в точке x_0 и вторую производную функции f определяют равенством

$$f''(x_0) = (f')'(x_0) = f^{(2)}(x_0).$$

По индукции, если определена производная $f^{(n-1)}$ в окрестности точки x_0, то производная порядка n в точке x_0 определяется равенством

$$f^n(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0).$$

Функция f в этом случае называется n-дифференцируемой в точке x_0.

Теорема 36.1 (формула Тейлора)**.** Пусть f n-дифференцируема на отрезке с концами $x_1,\ x$ и имеет производную порядка $n+1$ внутри него. Тогда при любой функции ϕ, непрерывной на этом отрезке и имеющей внутри него производную $\phi'(x) \neq 0$, найдется точка ξ, лежащая между x_0 и x, такая, что

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0) + r_n(x_0; x),$$

где

$$r_n(x_0; x) = \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{\phi'(\xi)n!} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

Теорема 36.2 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)**.** Взяв $\phi(t) = (x - t)^{n+1}$,

$$r_n(x_0; x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}.$$

Теорема 36.3 (формула Тейлора-Пеано, локальная формула Тейлора)**.** Пусть f n-дифференцируема в точке x_0. Тогда справедливо равенство

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

при $x \to x_0$.

37 Вопрос

Правила Лопиталя.

Теорема 37.1 (первое правило Лопиталя)**.** Пусть f и g определены и дифференцируемы на интервале (a, b), $\forall x \in (a, b)\ g'(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$.

Тогда если существует предел $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Теорема 37.2 (второе правило Лопиталя)**.** Пусть f и g определены и дифференцируемы на интервале (a, b), $\forall x \in (a, b)\ g'(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$.

Тогда если существует предел $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Стоит отметить, что данные правила справедливы при $x \to a - 0$, $x \to a$, $x \to \pm\infty$.

38 Вопрос

*Достаточные условия экстремума.

Теорема 38.1 (первое достаточное условие экстремума)**.** Пусть функция f дифференцируема в $\mathring{O}(x_0)$ и непрерывна в точке x_0. Тогда если производная $f'(x)$

- положительна слева и отрицательна справа от x_0 или
- отрицательна справа и положительна слева от x_0, то

точка x_0 является точкой локального экстремума функции f.

Иначе экстремума в точке x_0 нет.

Доказательство. Докажем случай, когда f' положительна слева от x_0 и отрицательна справа от x_0. То есть требуется доказать, что x_0 – точка локального максимума $\Leftrightarrow$

$$\exists O(x_0)\ \forall x \in O(x_0)\ f(x) \leq f(x_0).$$

Слева от точки x_0 $f'(x) > 0$. Тогда по теореме о достаточном условии строгой монотонности $f \uparrow\uparrow \Rightarrow$

$$\forall x \in \mathring{O}(x_0):\ x < x_0\ f(x) < f(x_0).$$

Аналогично справа от точки x_0: $f \downarrow\downarrow \Rightarrow$

$$\forall x \in \mathring{O}(x_0): \; x > x_0 \; f(x) < f(x_0).$$

Значит, учитывая, что $f(x_0) = f(x_0)$,

$$\forall x \in O(x_0) \; f(x) \leq f(x_0) \Leftrightarrow$$

точка x_0 – локальный максимум.

Сходно доказательство второго случая. $\square$

Теорема 38.2 (второе достаточное условие экстремума)**.** Пусть f дважды дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = 0$. Тогда

- если $f''(x_0) < 0$, то функция имеет в точке x_0 локальный максимум, и
- если $f''(x_0) > 0$, то функция имеет в точке x_0 локальный минимум.

Доказательство. Докажем случай локального максимума. Из условия $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ является точкой убывания функции f.

Поскольку $f'(x_0) = 0$, то $\exists O(x_0)$, в пределах которой функция f' положительна слева и отрицательна справа от точки x_0.

Воспользовавшись предыдущей теоремой, приходим к заключению, что точка x_0 – локальный максимум.

Случай локального минимума доказывается аналогично. $\square$

Теорема 38.3 (третье достаточное условие экстремума)**.** Пусть f n-дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$.

Тогда при n четном

1. если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то точка x_0 является точкой локального максимума,
2. если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то точка x_0 является точкой локального минимума.

И при n нечетном

1. если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то точка x_0 является точкой убывания,
2. если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то точка x_0 является точкой роста

функции f.

Доказательство. Применяя локальную формулу Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) =$$
$$= f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \alpha(x)(x - x_0)^n,$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Пусть $A(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)$. Пусть $f^{(n)}(x_0) < 0$ и n четное. Тогда

$$\lim_{x \to x_0} A(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} < 0$$

$\exists\mathring{O}(x_0)\,\forall x \in \mathring{O}(x_0)\; A(x) < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = A(x)(x-x_0)^n < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$. Это и означает, что точка x_0 является точкой локального максимума функции f.

Если $f^{(n)}(x_0) < 0$ и n нечетное, то

$$sign(f(x) - f(x_0)) = sign(A(x)(x-x_0)^n) = -sign(x - x_0),$$

то есть точка x_0 – точка убывания функции f.

Остальные случаи доказываются аналогично. □

39 Вопрос

Выпуклые функции. Критерии выпуклости функции.

Определение 39.1 (выпуклой функции)**.** Функция f, определенная на интервале (a,b), называется выпуклой, если $\forall x_1,\ x_2 \in (a,b)$ и $\forall \alpha_1 \geq 0,\ \alpha_2 \geq 0$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, имеет место неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Если при $x_1 \neq x_2$ и $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$ это неравенство является строгим, то функцию называют строго выпуклой.

Определение 39.2 (вогнутой функции)**.** Функцию f, определенную на интервале (a,b), называют вогнутой, если $\forall x_1,\ x_2 \in (a,b)$ и $\forall \alpha_1 \geq 0,\ \alpha_2 \geq 0$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, имеет место неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Из соотношений $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ имеем

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1},\ \alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

поэтому перепишем неравенство из определения выпуклой функции следующим образом:

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Учитывая, что $x_1 \leq x \leq x_2$ и $x_1 < x_2$, после домножения неравенства на $x_2 - x_1$ получаем

$$(x_2 - x_1) f(x_1) - (x_2 - x_1) f(x) + (x - x_1) f(x_2) \geq 0.$$

Поскольку $x_2 - x_1 = (x_2 - x) + (x - x_1)$, из последнего равенства находим, что

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

при $a < x_1 < x < x_2 < b$

Последнее неравенство является иной формой записи **определения выпуклости функции** на интервале (a,b).

Теорема 39.1 (критерий выпуклости дифференцируемой функции)**.** Пусть функция f дифференцируема на интервале (a, b). Тогда

$$f \text{ – выпуклая } \Leftrightarrow f' \uparrow .$$

при этом условию $f' \uparrow\uparrow$ соответствует строгая выпуклость f.

Теорема 39.2 (критерий выпуклости 2-дифференцируемой функции)**.** Пусть функция 2-дифференцируема на интервале (a, b). Тогда

$$f \text{ – выпуклая } \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) \ f''(x) \geq 0.$$

40 Вопрос

Первообразная. *Теорема о первообразной. Неопределенный интеграл и его простейшие свойства.

Определение 40.1 (первообразной функции)**.** Пусть функции F и f определены на интервале (a, b). Функция F называется первообразной функции f, если

$$\forall x \in (a, b) F'(x) = f(x).$$

Теорема 40.1 (о первообразной)**.** Если F является первообразной функции f на интервале (a, b), то при любом $C \in \mathbb{R}$ функция $F + C$ является первообразной функции f на этом интервале.

Доказательство. Заключение теоремы верно, Поскольку

$$\forall x \in (a, b) \ (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

□

Определение 40.2 (неопределенного интеграла)**.** Совокупность всех первообразных функции f на интервале (a, b) называется неопределенным интегралом от функции f и обозначается символом

$$\int f(x) dx.$$

Свойство 40.1 (свойства неопределенного интеграла)**.** 2 свойства, вытекающие из определения интеграла (и дифференциала):

1. $d \int f(x) dx = f(x) dx.$
2. $\int dF(x) dx = F(x) + C.$

2 свойства, называемые **свойствами линейности интеграла**:

3. $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$
4. $\int c f(x) dx = c \int f(x) dx.$

41 Вопрос

*Основные методы интегрирования: формула замены переменной и формула интегрирования по частям.

Теорема 41.1 (формула замены переменной)**.** Пусть f определена на интервале (a, b) и

$$\int f(t)dt = F(t) + C,$$

а функция $\phi : \ (\alpha, \ \beta) \to (a, \ b)$ дифференцируема. Тогда функция

$$(f \circ \phi)\phi'$$

имеет на интервале $(\alpha, \ \beta)$ первообразную, причем

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = F(\phi(x)) + C.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции

$$(F(\phi(x)))' = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x).$$

□

Теорема 41.2 (формула интегрирования по частям)**.** Пусть функции f и g дифференцируемы на интервале (a, b) и функция gf' имеет первообразную. Тогда функция fg' имеет первообразную, причем

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

Доказательство. По правилу дифференцирования произведения

$$\forall x \in (a, b) \ (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Это означает, что функция $f(x)g(x)$ является первообразной функции $h(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Тогда в силу свойства линейности интеграла функция

$$f(x)g'(x) = h(x) - f'(x)g(x)$$

тоже имеет первообразную, причем

$$\int f(x)g'(x)dx = \int h(x)dx - \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

□

42 Вопрос

Определение интеграла Римана. Необходимое условие интегрируемости.

Определение 42.1. Пусть $[a, b]$ – отрезок на числовой прямой. Набор точек $\{x_k\}_{k=0}^n$ такой, что

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

будем называть **разбиением отрезка** $[a, b]$ и обозначать

$$P = P_{[a,b]} = \{x_k\}_{k=0}^n.$$

Обозначим $\triangle_k = [x_{k-1}, x_k]$, $\triangle x_k = x_k - x_{k-1}$ $(k = 1, \dots, n)$.

Диаметром разбиения P назовем число $d = d(P) = \max\limits_{1\le k\le n} \triangle x_k$.

Систему точек $\xi_P = \{\xi_k\}_{k=0}^n$ такую, что $\xi_k \in \triangle_k$ $(k = 1, \dots, n)$ будем называть **системой промежуточных точек**, соответствующей разбиению P.

Определение 42.2 (интегральной суммы Римана)**.** Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$. Сумма

$$\sigma(P) = \sigma(P, \xi_P) = \sigma(f, P, \xi_P) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\triangle x_k$$

называется интегральной суммой Римана функции f.

Ее геометрический смысл заключается в том, что она равна площади многоугольника со сторонами, параллельными координатным осям, аппроксимирующего криволинейную трапецию, одна из боковых сторон которой является графиком функции f на отрезке $[a, b]$ (только при неотрицательных значениях функции).

Определение 42.3 (предела интегральных сумм)**.** Число I называют пределом интегральных сумм Римана функции f при стремлении диаметра разбиения к нулю и обозначают

$$I = \lim_{d\to 0} \sigma(P),$$

если

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (P, \xi_P)\ (d(P) < \delta \Rightarrow |\sigma(P, \xi_P) - I| < \epsilon).$$

Функцию f в этом случае называют **интегрируемой по Риману** на отрезке $[a, b]$, а число I – **интегралом Римана** и обозначают символом

$$\int\limits_a^b f(x)dx = I.$$

43 Вопрос

Верхние и нижние суммы Дарбу, их свойства. Верхний и нижний интегралы.

Определение 43.1 (верхней и нижней сумм Дарбу)**.** Пусть функция f определена и ограничена на отрезке $[a, b]$, $P = \{x_k\}_{k=0}^n$ – разбиение отрезка. Положим

$$M_k = \sup_{x\in\triangle_k} f(x),\ m_k = \inf_{x\in\triangle_k} f(x),\ k = 1, \dots, n.$$

Суммы
$$S(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k$$
и
$$s(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k$$
будем называть, соответственно, верхней и нижней суммами Дарбу функции f для данного разбиения P.

Свойство 43.1 (свойства сумм Дарбу)**.**

1. $\forall P\ \forall \xi_P\ s(P) \leq \sigma(P, \xi_P) \leq S(P)$.
2. Если $P \subset P_1$, то есть все точки разбиения P входят в число точек разбиения P_1, то $s(P) \leq s(P_1)$, $S(P) \geq S(P_1)$.
3. $\forall P_1\ \forall P_2\ s(P_1) \leq S(P_2)$.

   Следствие 43.1. Множество нижних сумм $\{s(P)\}$ ограничено сверху, а множество верхних сумм $\{S(P)\}$ ограничено снизу.
4. $\forall P\ \forall \epsilon > 0\ \exists \xi_P\ 0 \leq S(P) - \sigma(P, \xi_P) < \epsilon$ $(0 \leq \sigma(P, \xi_P) - s(P) < \epsilon)$.

   Следствие 43.2. Для любого разбиения P
   $$S(P) = \sup_{\xi_P} \sigma(P, \xi_P),\ \ s(P) = \inf_{\xi_P} \sigma(P, \xi_P).$$

Определение 43.2. Верхний интеграл Дарбу от функции f определяется равенством
$$\overline{I} := \inf_P S(P).$$
нижний интеграл Дарбу –
$$\underline{I} := \sup_P s(P).$$

Теорема 43.1 (основная лемма Дарбу)**.** Верны равенства
$$\overline{I} = \lim_{d \to 0} S(P),\ \ \underline{I} = \lim_{d \to 0} s(P).$$

44 Вопрос

Критерий интегрируемости.

Теорема 44.1 (критерий интегрируемости)**.** Пусть функция f определена и ограничена на отрезке $[a, b]$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- f интегрируема.
- $\forall \epsilon > 0\ \exists P\ S(P) - s(P) < \epsilon$.
- $\underline{I} = \overline{I}$. При этом $\underline{I} = \overline{I} = \int\limits_a^b f(x) dx$.

45 Вопрос

*Теорема об интегрируемости непрерывной функции.

Теорема 45.1 (об интегрируемости непрерывной функции)**.** Неперывная на отрезке функция интегрируема на нем.

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $\epsilon > 0$ – произвольное число. Согласно теореме Кантора функция f равномерно непрерывна на отрезке $[a, b] \Leftrightarrow$

$$\exists \delta > 0 \ \forall \xi', \xi'' \in [a, b] \ (|\xi' - \xi''| < \delta \Rightarrow |f(\xi') - f(\xi'')| < \frac{\epsilon}{b-a}).$$

Если взять разбиение P отрезка $[a, b]$ с диаметром $d < \delta$, то $M_k - m_k < \frac{\epsilon}{b-a}$. Тогда

$$S(P) - s(P) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \triangle x_k < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \triangle x_k = \epsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow S(P) - s(P) < \epsilon.$$

Согласно теореме о критерии интегрируемости функция f интегрируема. □

46 Вопрос

*Теорема об интегрируемости монотонной функции.

Теорема 46.1 (об интегрируемости монотонной функции)**.** Монотонная на отрезке функция интегрируема на нем.

Доказательство. Если фнукция $f(x) = c = const$, то очевидно, она интегрируема и

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a).$$

Пусть $f \not\equiv const$. Рассмотрим случай, когда $f \uparrow$. Возьмем произвольное число $\epsilon > 0$ и $\delta = \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)} > 0$.

Для разбиения P диаметром $d < \delta$ получим:

$$S(P) - s(P) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \triangle x_k < \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)} \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) =$$
$$= \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)} \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)} (f(b) - f(a)) = \epsilon.$$

А значит функция f интегрируема. □

47 Вопрос

Свойства интеграла Римана (*доказательство одного из свойств).

Для сокращения записей далее класс функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$ будем обозначать $\mathfrak{R}[a, b]$.

Теорема 47.1 (линейность интеграла)**.** Если $f, g \in \mathfrak{R}[a, b],\ \lambda \in \mathbb{R}$, то $f+g,\ \lambda f \in \mathfrak{R}[a, b]$ и

$$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx,$$

$$\int\limits_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx$$

Доказательство.

$$\sigma(f+g, P, \xi_P) = \sigma(f, P, \xi_P) + \sigma(g, P, \xi_P),\ \sigma(\lambda f, P, \xi_P) = \lambda\sigma(f, P, \xi_P).$$

Остается перейти к пределу при $d(P) \to 0$. $\square$

Теорема 47.2. Пусть $a < c < b$. Тогда $f \in \mathfrak{R}[a, b] \Leftrightarrow f \in \mathfrak{R}[a, c]$ и $f \in \mathfrak{R}[c, b]$. При этом

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Доказательство.
$\Rightarrow$. Пусть $f \in \mathfrak{R}[a, b]$ и $\epsilon > 0$ – произвольное число. Тогда найдется разбиение $P = P_{[a,b]}$ такое, что $S(P) - s(P) < \epsilon$.

Перейдем к разбиению $P* = P \cup c$. В силу свойств сумм Дарбу имеем

$$S(P*) - s(P*) \leq S(P) - s(P) < \epsilon.$$

Рассмотрим разбиение $P*$ как объединение разбиений отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, то есть

$$P* = P'_{[a,c]} \cup P''_{[c,b]} = P' \cup P''.$$

Очевидно, что

$$S(P') - s(P') \leq S(P*) - s(P*) < \epsilon,\ S(P'') - s(P'') \leq S(P*) - s(P*) < \epsilon.$$

В силу критерия интегрируемости, это означает, что

$$f \in \mathfrak{R}[a, c],\ f \in \mathfrak{R}[c, b].$$

$\Leftarrow$. Пусть $f \in \mathfrak{R}[a, c],\ f \in \mathfrak{R}[c, b]$ и $\epsilon > 0$ – произвольное число. Тогда $\exists P' = P'_{[a,c]},\ \exists P'' = P''_{[c,b]}$ такие, что

$$S(P') - s(P') < \frac{\epsilon}{2},\ S(P'') - s(P'') < \frac{\epsilon}{2}.$$

Тогда для разбиения $P = P_{[a,b]} = P' \cup P''$ имеем

$$S(P) - s(P) = (S(P') - s(P')) + (S(P'') - s(P'')) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Это означает, что $f \in \mathfrak{R}[a, b]$.

Осталось доказать равенство для интегралов. Возьмем разбиение, содержащее точку c,

$$P = P_{[a,b]} = P'_{[a,c]} \cup P''_{[c,b]},$$

и систему промежуточных точек

$$\xi_P = \xi_{P'} \cup \xi_{P''}.$$

Очевидно равенство

$$\sigma(P, \xi_P) = \sigma(P', \xi_{P'}) + \sigma(P'', \xi_{P''}).$$

Осталось перейти в этом неравенстве к пределу при $d(P) \to 0$. □

Теорема 47.3 (другие операции над интегрируемыми функциями)**.** Если $f, g \in \mathfrak{R}[a, b]$, то $|f|$, $f \cdot g$ и $\frac{1}{f}$ при дополнительном условии $\forall x \in [a, b]$ $|f(x)| \geq C > 0$ интегрируемы на $[a, b]$.

Теорема 47.4 (о монотонности интеграла)**.** Пусть $f, g \in \mathfrak{R}[a, b]$ и $\forall x \in [a, b]$ $f(x) \leq g(x)$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Очевидно, что согласно условию теоремы $\forall P$ $\forall \xi_P$ выполняется

$$\sigma(f, P, \xi_P) \leq \sigma(g, P, \xi_P).$$

Переходя в неравенстве к пределу при $d(P) \to 0$, получим

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx.$$

□

Следствие 47.1. Если $f \in \mathfrak{R}[a, b]$ и $\forall x \in [a, b]$ $f(x) \geq 0$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Следствие 47.2. Если $f \in \mathfrak{R}[a, b]$, то

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|(b - a).$$

Теорема 47.5 (первая теорема о среднем)**.** Пусть $f, g \in \mathfrak{R}[a,b]$ и $\forall x \in [a,b]$ $g(x) \geq 0$ $(g(x) \leq 0)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Тогда

$$\exists \mu \in [m, M] \ \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx$$

При дополнительном условии непрерывности функции f $\exists \xi \in [a,b]$ такая, что

$$\exists \mu \in [m, M] \ \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\forall x \in [a,b]$ $g(x) \geq 0$. Тогда

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x),$$

и в силу монотонности интеграла

$$m\int\limits_a^b g(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int\limits_a^b g(x)dx.$$

Если $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$, то равенство для интегралов из заключения теоремы принимает вид $0 = 0$.

Если $\int\limits_a^b g(x)dx > 0$, то получим неравенство

$$m \leq \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} \leq M,$$

среднюю часть которого обозначим через μ. Доказано.

Если при этом функция непрерывна, то в силу теоремы Коши о промежуточных значениях найдется точка $\xi \in [a,b]$ такая, что $f(\xi) = \mu$. □

Следствие 47.3. Если $f \in \mathfrak{R}[a,b]$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, то $\exists \mu \in [m, M]$ такое, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

При дополнительном условии непрерывности функции f на $[a,b]$

$$\exists \xi \in [a,b] \ \int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Доказательство. Нужно взять функцию $g(x) \equiv 1$ и воспользоваться доказанной ранее теоремой. □

48 Вопрос

*Непрерывность интеграла по верхнему пределу интегрирования

Пусть функция $f \in \mathfrak{R}[a,b]$. Определим новую функцию

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt, \ x \in [a,b].$$

Теорема 48.1 (о непрерывности интеграла по верхнему пределу интегрирования)**.** Пусть $f \in \mathfrak{R}[a,b]$. Тогда $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ является функцией непрерывной на этом отрезке.

Доказательство. Пусть точки $x,\ x+h \in [a,b]$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Тогда

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int\limits_a^{x+h} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt \right| =$$
$$= \left| \int\limits_a^{x+h} f(t)dt \right| \le M|h| \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

То есть $F(x+h) \to F(x)$ при $h \to 0$, что означает непрерывность функции F в каждой точке $x \in [a,b]$. □

49 Вопрос

*Дифференцируемость интеграла по верхнему пределу интегрирования. *Формула Ньютона-Лейбница.

Теорема 49.1 (о дифференцируемости интеграла по верхнему пределу интегрирования)**.** Пусть функция $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$. Тогда функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ дифференцируема в точке x_0 и

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Доказательство. Используя свойства интеграла, получаем

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt=$$

$$=\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}(f(x_0)+(f(t)-f(x_0))dt=$$

$$=\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt+\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))dt=$$

$$=f(x_0)+\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))dt.$$

Рассмотрим последнее слагаемое. Пусть $\epsilon>0$ – произвольное число. В силу непрерывности функции f в точке x_0

$$\exists\delta>0\ \forall t\in[a,b]\ (t-x_0<\delta\Rightarrow|f(t)-f(x_0)|<\epsilon).$$

Тогда если $|h|<\delta$, то

$$\left|\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))dt\right|\leq\frac{1}{|h|}|h|\cdot\epsilon=\epsilon.$$

Это означает, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))dt=0.$$

Поэтому существует предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0),$$

то есть $F'(x_0)=f(x_0)$. □

Следствие 49.1. Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она имеет на этом отрезке первообразную. Одной из таких первообразных является функция $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$.

Теорема 49.2 (формула Ньютона-Лейбница)**.** Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a),$$

где Φ – произвольная первообразная функции f.

Доказательство. Согласно следствию из теоремы о дифференцируемости интеграла по верхнему пределу интегрирования произвольная первообразная функции f имеет вид

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt + C, \text{ где } C = const.$$

Положим в этом равенстве сначала $x = a$, а потом $x = b$. Тогда

$$\Phi(a) = \int\limits_a^a f(t)dt + C = 0 + C = C,$$

$$\Phi(b) = \int\limits_a^b f(t)dt + C.$$

Отсюда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

□

50 Вопрос

*Интегрирование по частям и *замена переменной в интеграле Римана.

Примечание 50.1.

$$f(x)|_a^b = f(b) - f(a)$$

Теорема 50.1 (формула интегрирования по частям)**.** Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, то справедливо равенство

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Доказательство. По правилу дифференцирования произведения имеем:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x).$$

По условию теоремы все функции в этом равенстве непрерывны, а значит, и интегрируемы на отрезке. Используя линейность интеграла и формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$u(x)v(x)|_a^b = \int\limits_a^b (u(x)v(x))'dx = \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx + \int\limits_a^b u(x)v'(x)dx.$$

□

Теорема 50.2 (формула замены переменной)**.** Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, функция g имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha,\beta]$ и $\min\limits_{t\in[a,b]} g(t) = g(\alpha) = a$, $\max\limits_{t\in[a,b]} g(t) = g(\beta) = b$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt.$$

Доказательство. Пусть Φ – первообразная функции f. Согласно правилу вычисления производной сложной функции

$$\forall t \in [a,b]\ (\Phi(g(t)))' = \Phi'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t),$$

то есть функция $\Phi\circ g$ является первообразной функции $(f\circ g)g'$. Согласно формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = \Phi(g(\beta)) - \Phi(g(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

$\square$