**Программа экзамена**
**по математическому анализу**
**1 семестр**

# 1 Ограниченные множества. Верхняя и нижняя грани числовых множеств. Свойства граней.

**Определение.** *Множество $X$ называется ограниченным сверху, если*

$$\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \leq M$$

*При этом $M$ называется мажорантой.*

**Определение.** *Множество $X$ называется ограниченным снизу, если*

$$\exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \leq m$$

*При этом $m$ называется минорантой.*

**Определение.** *Множество $X$ называется ограниченным, если оно ограничено и сверху, и снизу.*

***Определение верхней грани множества***

$$a = sup\,X \overset{df}{\Leftrightarrow} (\forall\, x \in X\ x \leq a) \wedge (\forall\, a' \leq a\, \exists\, x' \in X\ x' \geq a) \overset{df}{\Leftrightarrow} \begin{matrix} 1) \forall\, x \in X\ x \leq a \\ 2) \forall\, \epsilon > 0\, \exists\, x' \in X\ a - \epsilon < x' \end{matrix}$$

***Определение нижней грани множества***

$$a = inf\,X \overset{df}{\Leftrightarrow} (\forall\, x \in X\ x \geq a) \wedge (\forall\, a' \geq a\, \exists\, x' \in X\ x' \leq a) \overset{df}{\Leftrightarrow} \begin{matrix} 1) \forall\, x \in X\ x \geq a \\ 2) \forall\, \epsilon > 0\, \exists\, x' \in X\ x < a + \epsilon \end{matrix}$$

**Свойства** (некоторые свойства граней)**.** *Приведем полезные свойства граней.*

1. *Переход к грани в неравенстве.*

$$\forall x \in X : x \leq a \Rightarrow \sup X \leq a$$

$$\forall x \in X : x \geq a \Rightarrow \inf X \geq a$$

2. *Монотонность граней.*

$$X \subset Y, \exists \sup Y \Rightarrow \sup X \leq \sup Y$$

$$X \subset Y, \exists \inf Y \Rightarrow \inf X \geq \inf Y$$

3. *О максимальном и минимальном элементах органиченного множества.*

$$x_0 = max(X) \Rightarrow \sup X = x_0$$

$$x_0 = min(X) \Rightarrow \inf X = x_0$$

## 2 Теорема о существовании верхней грани.

**Теорема 1** (о существовании верхней грани). *У любого непустого ограниченного сверху множества существует верхняя грань.*

*Доказательство.* Рассмотрим случай, когда $\exists x \in X\ x \geq 0$.

Рассмотрим $\forall x \in X\ [x]$. $\forall x \in X\ x \leq M \Rightarrow \forall x \in X\ [x] \leq M$. Обозначим наибольшую $[x]$ $a_0$.

Рассмотрим $\forall x \in X : [x] = a_0$ и их первые десятичные знаки после запятой. Наибольший элемент обозначим $a_1$.

Рассмотрим $x \in X$ такие, что их целая часть равна $a_0$, первая цифра после запятой $a_1$. Обозначим наибольший второй десятичный знак после запятой среди этих чисел $a_2$.

Продолжая, мы определим некоторое число

$$a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

Докажем, что $a = \sup X$. Так как $a \geq 0$, то $\forall x \in X : x < 0\ a > x$. Докажем, что $\forall x \in X : x \geq 0\ x \leq a$. Пойдем от противного. Пусть некоторый неотрицательный $x = x_0, x_1 x_2 \dots x_n \dots$ множества $X$ не удовлетворяет неравенству $x \leq a$. Тогда $x > a$, и $\exists k \in \mathbb{N}\ x_0 = a_0, x_1 = a_1, \dots, x_{k-1} = a_{k-1}, x_k > a_k$. Но последние соотношения противоречат построению числа $a$. Итак, $a$ — мажоранта.

Докажем, что $a$ — наименьшая мажоранта. Пусть $a' = a'_0, a'_1 a'_2 \dots a'_n \dots$ — произвольное число, $a' < a$.

1. $a' < 0 \Rightarrow \forall x \in X\ x > a'$.

2. $a' \geq 0$.

   $a' < a \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}\ a'_0 = a_0, a'_1 = a_1, \dots, a'_{m-1} = a_{m-1}, a'_m < a_m$

   Из построения числа $a$: $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists x \in X\ x_0 = a_0, x_1 = a_1, \dots, x_m = a_m$.

   Следовательно, $x > a'$.

Таким образом, $a$ — наименьшая мажоранта. Получается, что $a = supX$. Аналогично доказывается теорема в том случае, когда $\forall x \in X\ x < 0$.

**Теорема 2** (о существовании нижней грани). *У любого непустого ограниченного снизу множества существует нижняя грань.*

## 3 Счетные множества и их свойства.

**Определение 1.** *$A \sim B$, если $\exists f : A \to B$ взаимнооднозначное.*

**Определение 2.** *Если $A \sim \mathbb{N} \Rightarrow A$ — счетное множество.*

**Теорема 1.** *Всякое бесконечное подмножество счетного множества является счетным.*

*Доказательство.* Пусть множество $A$ — счетное, $B$ — его бесконечное подмножество.

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Последовательно переберем $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n$. Если очередной элемент принадлежит также подмножеству $B$, ставим ему в соответствие некоторый номер $k \in \mathbb{N}$. Получим $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots\}$. Значит, множество $B$ — счетно.

**Теорема 2.** *Объединение последовательности счетных множеств является счетным множеством.*

*Доказательство.* Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — последовательность счетных множеств.

$$\begin{gathered}
A_1 = \{a_1^1, a_1^2, a_1^3, \ldots\} \\
A_2 = \{a_2^1, a_2^2, a_2^3, \ldots\} \\
A_3 = \{a_3^1, a_3^2, a_3^3, \ldots\} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

Пусть $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Пронумеруем элементы нового множества следующим образом:

$$a_1 = a_1^1, a_2 = a_2^1, a_3 = a_1^2, a_4 = a_3^1, a_5 = a_2^2, a_6 = a_1^3, \ldots$$

Элементы, которые уже были включены в множество $A$ пропускаются. В конечном счете, все элементы множества $A$ будут занумерованы. Значит, $A$ — счетное множество.

## 4 Теорема о несчетности интервала. Множества мощности континуум.

**Теорема 1** (теорема о несчетности интервала). *Множество всех точек интервала* $(0,1)$ *несчетно.*

*Доказательство.* От противного. Пусть множество точек интервала $(0,1)$ — счетное. Представляя каждое число этого интервала в виде бесконечной десятичной дроби, расположим их в виде последовательности

$$\begin{gathered} a_1 = 0, a_1^1 a_1^2 \dots a_1^n \dots, \\ a_2 = 0, a_2^1 a_2^2 \dots a_2^n \dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n = 0, a_n^1 a_n^2 \dots a_n^n \dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered}$$

Рассмотрим бесконечную десятичную дробь $b = 0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$, где $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n \neq a_n^n, 0, 9$. Очевидно, что $b \in (0,1)$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ $b \neq a_n$. Получено противоречие. Множество точек $(0,1)$ несчетно.

**Определение 1.** *Множество, эквивалентное множеству точек интервала* $(0,1)$*, называется множеством мощности континуума.*

$$A \sim (0,1) \Rightarrow A\text{— множество мощности континуума.}$$

## 5 Ограниченные последовательности. Достаточное условие ограниченности последовательности.

***Определение последовательности***

$(x_n) \overset{df}{\Leftrightarrow} f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$(x_n) - \text{огр. сверху} \overset{df}{\Leftrightarrow} \exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \leq M$

$(x_n) - \text{огр. снизу} \overset{df}{\Leftrightarrow} \exists m \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \geq M$

$(x_n) = O(1) \overset{df}{\Leftrightarrow} \exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N} |x_n| \leq M$

**Теорема 1** (достаточное условие ограниченности последовательности). *Если* $\exists M \in \mathbb{R}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $|x_n| \leq M$, *то* $x_n = O(1)$.

*Доказательство.* Пусть $M' = \max\{|x_1|, \dots, |x_{n_0-1}|, M\}$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ $|x_n| \leq M'$, т.е. $x_n = O(1)$.

## 6 Бесконечно малые последовательности. Теорема об арифметических действиях над бесконечно малыми последовательностями.

**Определение 1.** $x_n = o(1) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon\ |x_n| \leq \epsilon$

**Теорема 1** (об арифметических действиях над бесконечно малыми последовательностями)**.**

$$o(1) \cdot o(1) = o(1) \tag{1}$$
$$o(1) \cdot O(1) = o(1) \tag{2}$$
$$\textit{тем более } o(1) \cdot o(1) = o(1) \tag{3}$$

*Доказательство*

Докажем равенство (1). $x_n = o(1), y_n = o(1), \epsilon$ — произвольное положительное число. Тогда

$$\exists n'_\epsilon\ \forall n \geq n'_\epsilon\ |x_n| < \frac{\epsilon}{2}$$
$$\exists n''_\epsilon\ \forall n \geq n''_\epsilon\ |y_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

Следовательно, для $\forall n \geq n_\epsilon = \max\{n'_\epsilon, n''_\epsilon\}$ выполняется условие

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Значит, $|x_n \pm y_n| = o(1)$

Докажем равенство (2). $x_n = o(1), y_n = O(1), \epsilon$ — произвольное положительное число. Тогда

$$\exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ |y_n| \leq M$$
$$\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon\ |x_n| < \frac{\epsilon}{M}$$

Следовательно,

$$\forall n \geq n_\epsilon\ |x_n y_n| \leq |x_n||y_n| < \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon$$

Значит, $x_n y_n = o(1)$. А так как всякая бесконечно малая последовательность является ограниченной, $o(1) \cdot o(1) = o(1)$.

## 7 Бесконечно большие последовательности, их связь с бесконечно малыми.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall M > 0\ \exists n_M \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_M\ x_n > M$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall M > 0\ \exists n_M \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_M\ x_n < -M$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall M > 0\ \exists n_M \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_M\ |x_n| > M$

**Теорема 1** (связь бесконечно больших и бесконечно малых). $\forall n \in \mathbb{N}$ $(x_n \neq 0)$. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} = o(1)$.

*Доказательство.* Распишем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \exists M > 0\ n_M \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_m\ |x_n| > M$.

$$\begin{gathered} |x_n| > M \vdots |x_n| \\ 1 > \frac{M}{|x_n|} \vdots M \\ \frac{1}{M} > \frac{1}{|x_n|} \\ \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{M} \end{gathered}$$

То есть $\frac{1}{M} > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{1}{M}$. Значит, $\frac{1}{x_n} = o(1)$.

## 8 Предел последовательности. Теорема о единственности предела.

**Определение 1.** $(x_n)$ — *сходящаяся, если* $\exists a \in \mathbb{R}$ $(x_n) - a = o(1)$. *Число* $a$ *в этом случае называют пределом последовательности. Записывается это так:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

*или*

$$x_n \to a \text{ при } n \to \infty$$

*Последовательности, не являющиеся сходящимися, называют расходящимися.*

**Определение 2.** *Число* $a$ *называется пределом последовательности* $(x_n)$, *если*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon\ |x_n - a| < \epsilon$$

**Теорема 1** (о единственности предела). *Если* $(x_n) - a = o(1) \Rightarrow \exists! a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

*Доказательство.* От противного. Пусть это не так. Тогда $\exists a_1\ \exists a_2\ a_1 \neq a_2$ : $(x_n) - a_1 = o(1)$, $(x_n) - a_2 = o(1)$. Решая систему уравнений, вычтем из первого равенства второе:

$$(x_n) - (x_n) - a_1 + a_2 = o(1) - o(1) \Leftrightarrow a_2 - a_1 = o(1)$$

В силу того, что $(a_2 - a_1)$ — стационарная и бесконечно малая последовательность, делаем заключение, что $a_2 - a_1 = 0 \Leftrightarrow a_2 = a_1$. Противоречие. Значит, $\exists! a$.

## 9 Ограниченность сходящейся последовательности.

**Теорема 1** (об ограниченности сходящейся последовательности). *Если* $(x_n) - a = o(1) \Rightarrow (x_n) = O(1)$.

*Доказательство.* Пусть $(x_n) = a + o(1)$. Поскольку $o(1)$ ограничена, и стационарная последовательность $a$ также ограничена, то $(a + o(1))$, по теореме об арифметических действиях над органиченными последовательностями, ограничена.

## 10 Порядковые свойства предела. Переход к пределу в неравенствах.

**Теорема 1.** *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $a > b$, *то*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ x_n > b$$

*Аналогично, если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $a < b$, *то*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ x_n < b$$

*Доказательство.* Докажем первое утверждение. Пусть $\epsilon = \frac{a-b}{2}$. По определению предела

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ |x_n - a| < \frac{a-b}{2}$$

В силу того, что $\frac{a-b}{2} > 0$, запишем неравенство в следующем виде:

$$x_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} > b \Leftrightarrow \forall n \geq n_0\ x_n > b$$

Докажем второе утверждение. Пусть $\epsilon = \frac{b-a}{2}$. По определению предела

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ |x_n - a| < \frac{b-a}{2}$$

Поскольку $\frac{b-a}{2} > 0$,

$$x_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} < b \Leftrightarrow \forall n \geq n_0\ x_n < b$$

**Теорема 2.** *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,\ a < b \Rightarrow$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ x_n < y_n$$

*Доказательство.* Возьмем число $c$ такое, что $a < c < b$. Согласно предыдущей теореме,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_1 \ x_n < c$$

и

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_2 \ y_n > c$$

Тогда $\forall n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\} \ x_n < c < y_n \Leftrightarrow x_n < y_n$

**Теорема 3** (о переходе к пределу в неравенстве). *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b, \ \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \leq y_n \Rightarrow a \leq b$

*Доказательство.* От противного. Пусть $a > b$. Тогда, по предыдущей теореме,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ x_n > y_n,$$

что противоречит условию. Поэтому $a \leq b$.

## 11 Порядковый признак существования предела последовательности.

**Теорема 1** (порядковый признак существования предела). *Если* $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n < z_n < y_n$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a.$

*Доказательство.* Пусть $\epsilon > 0$. По определению предела

$$\exists n'_\epsilon \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n'_\epsilon \ a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$$

$$\exists n''_\epsilon \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n''_\epsilon \ a - \epsilon < y_n < a + \epsilon$$

Тогда $\forall n \geq n_\epsilon = \max\{n'_\epsilon, n''_\epsilon\} \ a - \epsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \epsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a.$

## 12 Арифметические свойства предела последовательности.

**Теорема 1** (арифметические свойства предела последовательности). *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *справедливо следующее:*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b,$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}, \ b \neq 0.$$

*Доказательство.* Согласно условию $x_n - a = o(1),\ y_n - b = o(1)$.

1. $x_n \pm y_n = (a + o(1)) \pm (b + o(1)) = (a \pm b) + (o(1) + o(1)) = (a \pm b) + o(1)$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$.

2. $x_n y_n = (a + o(1))(b + o(1)) = ab + ao(1) + bo(1) + o(1)o(1) = ab + o(1)$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$.

3. Рассмотрим

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{y_n b}(bx_n - ay_n) = \frac{1}{y_n b}(b(a + o(1)) - a(b + o(1))) = \\ = \frac{1}{y_n b}(bo(1) - ao(1)) = \frac{1}{y_n b}o(1)$$

$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n b) = b^2 > \frac{b^2}{2}$. Согласно одной из теорем о порядковых свойствах предела, $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ y_n > \frac{b^2}{2}$, т.е. $0 < \frac{1}{y_n b} < \frac{2}{b^2}$. Следовательно, $\frac{1}{y_n b} = O(1)$. Тогда $\frac{1}{y_n b}o(1) = O(1)o(1) = o(1)$ и $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = o(1)$

По определению предела, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

## 13 Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса о монотонных последовательностях.

**Определение 1**

*$(x_n)$ называется неубывающей, если $\forall n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} \geq x_n$. $x_n \uparrow$.*

*$(x_n)$ называется невозрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} \leq x_n$. $x_n \downarrow$.*

*Неубывающие и невозрастающие еще называют монотонными последовательностями.*

**Теорема 1** (Вейерштрасса о монотонных последовательностях)**.** *$(x_n)$ монотонная и $x_n = O(1)$. Тогда $(x_n)$ сходится.*

*Причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, если $x_n \uparrow$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, если $(x_n) \downarrow$.*

*Доказательство.* Докажем случай, когда $x_n \uparrow$. Так как $x_n = O(1) \Rightarrow \exists \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = a$.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \leq a$ и $\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ x_{n_\epsilon} > a - \epsilon$.

Так как $x_n \uparrow$, $\forall n \geq n_\epsilon\ a - \epsilon < x_{n_\epsilon} \leq x_n$.

Следовательно, $\forall \epsilon > 0\ \forall n \geq n_\epsilon\ a - \epsilon < x_{n_\epsilon} \leq x_n \leq a < a + \epsilon$ или

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon\ a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

Рассмотрим случай, когда $x_n \downarrow$. $x_n = O(1) \Rightarrow \exists \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n = a$.
Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \geq a$ и $\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ x_{n_\epsilon} < a + \epsilon$.
Так как $x_n \downarrow$, $\forall n \geq n_\epsilon\ x_n \leq x_{n_\epsilon} < a + \epsilon$.
Следовательно, $\forall \epsilon > 0\ \forall n \geq n_\epsilon\ a - \epsilon < a \leq x_n \leq x_{n_\epsilon} < a + \epsilon$ или

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon\ a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$$

Значит, $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n = a = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

**Замечание 1.** *Монотонная последовательность сходится $\Leftrightarrow$ она ограничена.*

## 14 Лемма о вложенных отрезках.

**Лемма 1** (о вложенных отрезках)**.** *У всякой стягивающейся последовательности отрезков существует, и притом единственная, точка, принадлежащая всем отрезкам последовательности.*
$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ *стягивающаяся* $\Rightarrow \exists! c\ \forall n \in \mathbb{N}\ c \in [a_n, b_n]$.

*Доказательство.* Рассмотрим $(a_n)$. Очевидно, что $a_n \uparrow$ и $a_n = O(1)$, причем $\forall m \in \mathbb{N}\ b_m = M_a$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса,
$\exists \lim\limits_{n \to \infty} a_n = c$ и $\forall n \in \mathbb{N}\ c \in [a_n, b_n]$.

Докажем единственность (от противного). Пусть $\exists d\ d \neq c\ \forall n \in \mathbb{N}\ d \in [a_n, b_n]$. Пусть тогда $c < d$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ [c, d] \subset [a_n, b_n] \Leftrightarrow b_n - a_n > d - c > 0$, что противоречит условию $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$ (определение стягивающейся последовательности отрезков).

## 15 Подпоследовательности и частичные пределы последовательности. Теорема о подпоследовательностях сходящейся последовательности.

**Определение 1.** *Пусть $x_n$ — числовая последовательность и $(k_n)$ — некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $y_n = x_{k_n}$ называется подпоследовательностью последовательности $(x_n)$.*

**Теорема 1** (о подпоследовательностях сходящейся последовательности)**.** *Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится, причем к тому же числу, что и вся последовательность.*

*Доказательство.* Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} = a$ и $\epsilon > 0$. Тогда $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon$
$|x_n - a| < \epsilon$. Заметим, что $k_n$ не может быть меньше $n$, а поэтому $k_n \geq n \geq n_\epsilon$. Значит, что для $y_n = x_{k_n}$ справедливо следующее: $\forall n \geq n_\epsilon\ |y_n - a| < \epsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = a$.

# 16 Верхний и нижний пределы последовательности. Корректность определения.

**Определение 1.** *Пусть* $x_n = O(1)$.

*Верхний предел последовательности определяется равенством*

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k$$

*Нижний предел последовательности определяется равенством*

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k$$

Докажем корректность этих определений, т.е. что они имеют смысл.

Для верхнего предела обозначим $y_n = \sup\limits_{k\geq n} x_k$. Очевидно, что $y_n = O(1)$, и, по свойству верхней грани, $y_n \downarrow$. Согласно теореме Вейерштрасса, $(y_n)$ сходится.

Для нижнего предела обозначим $y_n = \inf\limits_{k\geq n} x_k$. $y_n = O(1)$, и, по свойству нижней грани, $y_n \uparrow$. По теореме Вейерштрасса, $(y_n)$ сходится.

# 17 Свойства верхнего и нижнего пределов.

**Теорема 1** (неофиц. порядковое свойство верхнего и нижнего пределов)**.** *Для любой* $x_n = O(1)$ *справедливо неравенство* $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

*Доказательство.* Пусть $z_n = \inf\limits_{k\geq n} x_k$, $y_n = \sup\limits_{k\geq n} x_k$. Очевидно, что $\forall n \in \mathbb{N}\ z_n \leq y_n$. Значит, по теореме о переходе к пределу в неравенстве, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n \Leftrightarrow \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

**Теорема 2** (неофиц. признак сходимости ограниченной последовательности)**.** *У* $x_n = O(1)\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$. *Причем* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$. Распишем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon\ a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$$

Тогда справедливо следующее:

$$\forall k \geq n (\geq n_\epsilon)\ a - \epsilon < \inf_{k\geq n} x_k \leq x_n \leq \sup_{k\geq n} x_k < a + \epsilon$$

Или $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$\Leftarrow$. Пусть $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Заметим, что $\forall n \in \mathbb{N}\ \inf\limits_{k\geq n} x_k \leq x_n \leq \sup\limits_{k\geq n} x_k$. По теореме о порядковом признаке существования предела $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

# 18 Теорема Больцано-Вейерштрасса.

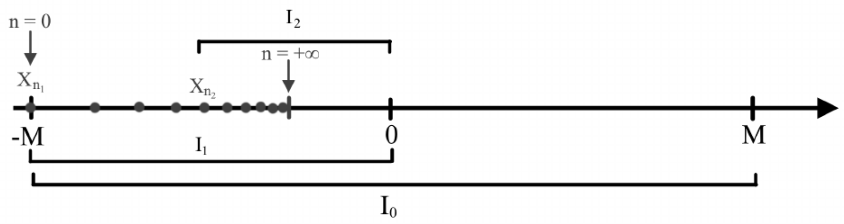
**Теорема 1** (Больцано-Вейерштрасса)**.** *У любой $x_n = O(1)$ существует сходящаяся подпоследовательность.*

*Доказательство.* $x_n = O(1) \Leftrightarrow \exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ |x_n| \leq M$.

Разделим отрезок $I_0 = [-M, M]$ пополам. По крайней мере один из получившихся отрезков содержит бесконечное число членов $(x_n)$. Выберем его и обозначим $I_1$. В качестве первого члена искомой посдпоследовательности выберем некоторый элемент $x_{n_1} \in I_1$.

Разделим отрезок $I_1$ пополам. Обозначим ту его часть, в которой содержится бесконечное число элементов $(x_n)$, $I_2$. Из данного отрезка выберем такой член последовательности $x_{n_2}$, что $n_2 > n_1$.

Продолжая, мы в итоге получим последовательность вложенных отрезков $(I_n)$, и подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$, причем $x_{n_k} \in I_k$.




Длина каждого отрезка $I_k$ равна $\frac{2M}{2^k} = \frac{M}{2^{k-1}} \to 0$ при $k \to \infty \Rightarrow (I_k)$ является стягивающейся. По лемме о вложенных отрезках $\exists! c\ \forall k \in \mathbb{N}\ c \in I_k$. Обозначим $I_k = [a_k, b_k]$.

$a_k \to c,\ b_k \to c$ при $k \to \infty$, а $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \Rightarrow$ (по теореме о порядковом признаке существования предела) $x_{n_k} \to c$ при $k \to \infty$.

# 19 Фундаментальные последовательности. Теорема об ограниченности фундаментальной последовательности.

**Определение 1.** $(x_n)$ *называется фундаментальной, если*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon\ \forall m \geq n_\epsilon\ |x_n - x_m| < \epsilon$$

*или если выполняется равносильное условие*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_\epsilon \ \forall p \in \mathbb{N} \ |x_{n+p} - x_n| < \epsilon$$

**Теорема 1** (об ограниченности фундаментальной последовательности)**.** *Если* $(x_n)$ *фундаментальная* $\Rightarrow x_n = O(1)$.

*Доказательство.* Пусть в условии фундаментальности $\epsilon = 1$. Тогда

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_1 \ |x_n - x_{n_1}| < 1$$

т.е. $\forall n \geq n_1 \ x_{n_1} - 1 \leq x_n \leq x_{n_1} + 1$. По теореме о достаточном условии ограниченности последовательности, $x_n = O(1)$.

## 20 Критерий Коши сходимости последовательности.

**Теорема 1** (критерий Коши сходимости последовательности)**.** $(x_n)$ *сходится* $\Leftrightarrow$ $(x_n)$ *фундаментальна.*

*Доказательство.*
$\Rightarrow$. Пусть $(x_n) \to a$ при $n \to \infty$. Возьмем $\epsilon > 0$. Тогда $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$, такой, что

$$\forall n \geq n_\epsilon \ |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$$
$$\forall m \geq e_\epsilon \ |x_m - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

Следовательно,

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

То есть $(x_n)$ фундаментальна.

$\Leftarrow$. Пусть $(x_n)$ фундаментальна $\Rightarrow$ $x_n = O(1)$. Тогда, по теорема Больцана-Вейерштрасса, существует сходящаяся подпоследовательность $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$. Пусть $x_{k_n} \to a$ при $n \to \infty$. Поскольку $k_n \geq n$, то из условия фундаментальности следует, что $x_n - x_{k_n} \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $x_n - a = (x_n - x_{k_n}) + (x_{k_n} - a) \to 0$, т.е. $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

## 21 Определения Гейне и Коши предела функции в точке. Теорема об их эквивалентности.

**Определение 1.** *Пусть* $X \subset \mathbb{R}$. *Точка* $x_0$ *называется предельной точкой множества* $X$, *если в любой проколотой окресности точки* $x_0$ *есть точки множества* $X$.

**Определение 2** (предела функции по Коши)**.** *Пусть функция $f$ определена на множестве $X$ и точка $x_0$ является предельной точкой множества $X$.*

*Число $A$ называют пределом функции в точке $x_0$, если*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \ (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon)$$

*Формулой записывается так:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

*Данное определение можно переформулировать, пользуясь понятием окрестности точки:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall O(A) \ \exists \mathring{O}(x_0): \ f(\mathring{O}(x_0)) \subset O(A)$$

**Определение 3** (предела функции по Гейне)**.** *Пусть функция $f$ определена на множестве $X$ и точка $x_0$ является предельной точкой множества $X$.*

*Число $A$ называют пределом функции $f$ в точке $x_0$, если для любой последовательности $(x_n)$ точек множества $X$ такой, что $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ и $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \neq x_0$, выполняется условие $f(x_n) \to A$ при $n \to \infty$.*

**Теорема 1** (эквивалентность определений предела по Коши и по Гейне)**.** *Определение предела функции в точке по Коши равносильно определению предела по Гейне.*

*Доказательство.*

К $\Rightarrow$ Г. Пусть число $A$ является пределом функции $f(x)$ в точке $x_0$ по Коши и $(x_n)$ — последовательность точек множества $X$, $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$.

Пусть $\epsilon > 0$. Согласно определению Коши, найдется число $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \epsilon$, если $0 < |x - x_0| < \delta$. Поскольку $x_n \to x_0$, то $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ |x_n - x_0| < \delta$, следовательно, $|f(x_n) - A| < \epsilon$. Это и означает, что $f(x_n) \to A$ при $n \to \infty$, т.е. функция $f$ удовлетворяет определению Гейне.

Г $\Rightarrow$ К. Пусть число $A$ является пределом функции $f(x)$ в точке $x_0$ по Гейне. Докажем, что $A$ является пределом функции $f(x)$ в точке $x_0$ по Коши, от противного. Тогда

$$\forall \epsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta \in X \ (0 < |x_\delta - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_\delta) - A| \geq \epsilon_0)$$

Рассмотрим последовательность $\delta_n = \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}$, и найдем $x_n$ такие, что

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n) - A| \geq \epsilon_0$$

Построенная последовательность $x_n \to x_0$ и $x_n \neq x_0$. Тогда согласно определению Гейне $f(x_n) \to A$, что противоречит условию $|f(x_n) - A| \geq \epsilon_0 > 0$. Получено противоречие. Значит, Г $\Rightarrow$ К.

# 22 Критерий Коши существования предела функции.

**Определение 4.6.** *Говорят, что функция $f$ удовлетворяет в точке $x_0$ условию Коши, если выполняется условие*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x', x'' \in X\ (0 < |x' - x_0| < \delta, 0 < |x'' - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \epsilon).$$

***Критерий Коши существования предела функции в точке*** **(4.2.1).**

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow f$ *удовлетворяет в т. $x_0$ условию Коши*

***Доказательство*** *(в сокращении от Дани):*

$\Rightarrow$ *Пусть* $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\epsilon > 0$. *По определению предела функции Коши* $\exists\ \delta > 0$ *такое, что*

$(1)\ \forall\ x' \in X\ (0 < |x' - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x') - A| < \frac{\epsilon}{2})$

$(2)\ \forall\ x'' \in X\ (0 < |x'' - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x'') - A| < \frac{\epsilon}{2})$

*Тогда* $|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - A) + (A - f(x''))| \leq |f(x') - A| + |A - f(x'')| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \Rightarrow$

*функция $f$ удовлетворяет в точке $x_0$ условию Коши.*

$\Leftarrow$ *Пусть $f$ удовлетворяет в точке $x_0$ условию Коши. Докажем, что $f$ удовлетворяет условию определения предела по Гейне. Пусть* $\epsilon > 0$, $x_n \to x_0$ *и* $x_n \neq x_0$. *По условию Коши выберем* $\delta > 0$ *такое, что*

$\exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq n_0\ (0 < |x_n - x_0| < \delta)$. *Тем более,* $\forall\ p \in \mathbb{N}\ 0 < |x_{n+p} - x_0| < \delta$.

*В силу условия Коши* $\forall\ n \geq n_0\ \forall\ p \in \mathbb{N}\ |f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \epsilon \Rightarrow (f(x_n))$ *— фунд. последовательность* $\Rightarrow$ *в силу критерия Коши сходимости последовательности* $(f(x_n))$ *сходится к некоторому* $A$.

*Докажем, что* $\forall\ x'_n \to x_0$, $x'_n \neq x_0$ *выполняется условие* $f(x'_n) \to A$.

*Предположим, что* $f(x'_n) \to A'$. *Рассмотрим последовательность*

$$x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_n, x'_n, \ldots,$$

*которая тоже сходится к* $x_0$. *В силу доказанного выше, последовательность*

$$f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \ldots, f(x_n), f(x'_n), \ldots$$

*сходится к некоторому числу* $A''$. *Тогда её подпоследовательности* $(f(x_n))$ *и* $(f(x'_n))$ *тоже сходятся к числу* $A'' \Rightarrow A = A' = A''$

*Теорема доказана.*

# 23 Односторонние пределы функции, связь с пределом.

Определение левостороннего предела

Определение правостороннего предела

**Определение 4.7.** *(левостороннего предела по Коши) Пусть* $A \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ (x_0-\delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x)-A| < \epsilon) \tag{16}$$

*Для левостороннего предела используют более короткое обозначение*

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

**Определение 4.8.** *(правостороннего предела по Коши) Пусть* $A \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ (x_0 < x < x_0+\delta \Rightarrow |f(x)-A| < \epsilon) \tag{17}$$

*Для правостороннего предела используют более короткое обозначение*

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

Они же на языке окрестностей:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A \quad \iff \quad \forall O(A)\ \exists \mathring{O}_-(x_0) : f(\mathring{O}_-(x_0)) \subset O(A);$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A \quad \iff \quad \forall O(A)\ \exists \mathring{O}_+(x_0) : f(\mathring{O}_+(x_0)) \subset O(A);$$

***Теорема о связи односторонних пределов с пределом функции*** $(4.3.1)$

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \overset{df}{\iff} \exists \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \exists \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A$$

$^{*}$ *Доказательство тривиально, знать только формулировку*

## 24 Арифметические свойства предела функции.

***Теорема об арифметических свойствах предела функции*** **(4.4.1)**

*Пусть* $\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0} g(x)=B$. *Тогда*

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B,$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))=AB,$$
$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{A}{B}\,(\textit{при } B\neq 0)$$

*Доказательство*$_{(\textit{в сокращении от Дани})}$:

*Пусть* $x_n\to x_0$ *и* $x_n\neq x_0$. *Тогда* $f(x_n)\to A$ *и* $g(x_n)\to B$.

*По теореме об арифметических свойствах предела последовательности имеем*:

$f(x_n)\pm g(x_n)\to A\pm B,\ f(x_n)g(x_n)\to AB,\ \frac{f(x_n)}{g(x_n)}\to\frac{A}{B}\Rightarrow$ *по определению Гейне*:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B,$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))=AB,$$
$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=A/B$$

*Теорема доказана*.

## 25 Порядковые свойства предела функции.

***Теорема о порядковых свойствах предела функции*** **(4.4.2)**

*Пусть* $\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0} f(x)=B$ *и* $A<B$. *Тогда* $\exists \overset{o}{O}_\epsilon(x_0)\cap X\ f(x)<g(x)$

*Доказательство*:

*От противного. Пусть* $\exists x_n\to x_0, x_n\neq x_0$ *такая, что* $f(x_n)\geq g(x_n)\Rightarrow \lim_{n\to x_0} f(x_n) \lim_{n\to x_0} g(x_n)\Rightarrow A\geq B\Rightarrow$ *противоречие*.

*Теорема доказана*.

*Следствие*:

*Пусть* $\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0} f(x)=B, C\in\mathbb{R}$. *Тогда, если* $\exists \overset{o}{O}_\epsilon(x_0), \forall x\in \overset{o}{O}_\epsilon(x_0),$

$$f(x)>g(x)\Rightarrow A\geq B$$
$$f(x)\geq g(x)\Rightarrow A\geq B$$
$$f(x)>C\Rightarrow A\geq C$$
$$f(x)\geq C\Rightarrow A\geq C$$

# 26 Порядковый признак существования предела функции.

***Порядковый признак существования предела функции*** $(\mathbf{4.4.3})$

$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x), \forall x\in \overset{o}{O}_{\delta}(x_0) f(x)\le h(x)\le g(x)\Rightarrow \lim_{x\to x_0} h(x)=A.$

*Доказательство*:

*Пусть* $x_n\to x_0$ *и* $x_n\ne x_{0.}$ *Тогда* $f(x_n)\le h(x_n)\le g(x_n)$ *и* $\lim_{n\to x_0} f(x)=\lim_{n\to x_0} g(x)=A\Rightarrow$ *по порядковому признаку существования предела последовательности* $\exists\lim_{n\to x_0} h(x_n)=A\Rightarrow$ *по определению предела Гейне* $\lim_{x\to x_0} h(x)=A.$

*Теорема доказана.*

# 27 Теорема о пределе сложной функции.

***Теорема о пределе сложной функции*** $(\mathbf{4.4.5})$

$\forall x\in \overset{o}{O}(x_0)\lim_{x\to x_0} g(x)=y_0, g(x)\ne y_0$ *и* $\lim_{y\to y_0} f(y)=A\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(g(x))=A$

*Доказательство*:

*Возьмём* $(x_n)$ *из* $\overset{o}{O}(x_0): x_n\to x_{0.}$ *Тогда* $y_n=g(x_n)\to y_0$ *и* $y_n\ne y_0, f(g(x_n))=f(y_n)\to A\Rightarrow$ *по определению Гейне* $\lim_{x\to x_0} f(g(x))=A$

*Теорема доказана.*

# 28 Непрерывность функции в точке. Свойства функций непрерывных в точке.

***Определение непрерывности функции в точке***

*Пусть* $f$ *определена на* $X, x_0\in X-$ *предельная точка* $x$.

$f$ *непр. в т.* $x_0 \overset{df}{\Leftrightarrow}$ *выполняется хотя бы одно из условий*:

$(1)\forall \epsilon>0\exists\delta>0\forall x\in X(|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\epsilon)$ *(опр. предела по Коши)*

$(2)\forall O(f(x_0))\exists O(x_0): f(O(x_0))\subset O(f(x_0))$

$(3)\forall(x_n): x_n\to x_0 f(x_n)\to f(x_0)$ *(опр. предела по Гейне)*

$(4)\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$(5) f(x)=f(x_0)+\alpha(x)$*, где* $\alpha(x)-$ *беск. малая при* $x\to x_0$

$f(x)$ *непр. слева* $\overset{df}{\Leftrightarrow}\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$

$f(x)$ *непр. справа* $\overset{df}{\Leftrightarrow}\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$

***Теорема о непрерывности функции в точке*** $(\mathbf{5.1.1})$

$f - \text{непр} \overset{df}{\Leftrightarrow} f\ \text{непр. справа} \wedge f\ \text{непр. слева}$

***Теорема о свойствах непрерывных функций*** $(\mathbf{5.1.2})$

*Пусть* $f$ *и* $g - \text{непр. в т.}\ x_0$. *Тогда*

$(1)\ \forall a, b \in \mathbb{R}\ af + bg - \text{непр. в т.}\ x_0$

$(2)\ fg - \text{непр. в т.}\ x_0\ (3)\ f/g - \text{непр в т.}\ x_0\ (\text{при}\ g(x_0) \neq 0)$

$(4)\ f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists O(x_0)\ \forall x \in O(x_0)\ f(x) f(x_0) > 0\ (\text{т.е.}\ f(x)\ \text{сохраняет знак})$

$(5)\ f$ *локально ограничена в* $O(x_0)$

# 29 Непрерывность функции на множестве. Теорема об обращении функции в нуль и теорема Коши о промежуточных значениях функции.

$f - \text{непр. на}\ X \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall x \in X\ f - \text{непр. в}\ x$

$f - \text{непр.} \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall x \in D(f)\ f - \text{непр. в}\ x$

Теорема Коши об обращении функции в нуль

**Теорема 5.2.1.** *(Коши об обращении функции в нуль). Пусть функция $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$. Тогда найдется точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = 0$.*

*Доказательство.* Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Если $f(x_1) = 0$, то все доказано. Если нет, то из двух отрезков $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$ выберем тот, на концах которого функция принимает значения разных знаков. Переобозначим его симолом $[a_1, b_1]$.

С отрезком $[a_1, b_1]$ поступим аналогичным образом. И так далее. Если в процессе деления очередного отрезка мы так и не получим точку, в которой фукция обращается в нуль, то образуется стягивающаяся последовательностьотрезков $([a_n, b_n])$. Пусть $x_0$ - их общая точка. Тогда $a_n \to x_0$ и $b_n \to x_0$. Поскольку функция $f$ непрерывна, то $f(a_n) \to f(x_0)$ и $f(b_n) \to f(x_0)$. Так как $f(a_n)f(b_n) < 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) = f^2(x_0) \leq 0.$$

Следовательно, $f(x_0) = 0$, что и требовалось доказать. $\sqcap$

***Теорема Коши о промежуточных значениях функции*** $(\mathbf{5.2.2.})$

$f - \text{непр. на}\ [a, b], f(a) = A, f(b) = B, A \neq B, C - \text{любое число между}\ A\ \text{и}\ B \Rightarrow \exists c \in [a, b]\ f(c) = C$

*Доказательство*:

*Рассмотрим* $g(x) = f(x) - C$. *По теореме Коши об обращении функции в нуль* $\exists c \in [a, b]\ f(c) = C$.

*Теорема доказана.*

## 30 Компакт. Теорема об ограниченности компакта. Критерий компактности.

Определение компактного множества

$X \subset \mathbb{R} - \textit{компакт} \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall (x_n) \exists (y_n) = (x_{k_n}) : y_n \to x_0, x_0 \in X$

*Эти 3 определения не требуются для ответа на вопрос, но их знание нам очень понадобится позже:*
$X - \textit{замкнутое} \overset{df}{\Leftrightarrow} X$ *содержит все свои предельные точки*
$x \in X - \textit{внутренняя точка } X \overset{df}{\Leftrightarrow} \exists O(x) \subset X$
$X - \textit{открытое} \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall x \in X \; x - \textit{внутр}.$

Теорема об ограниченности компакта

**Теорема 5.2.3.** *Всякий компакт является ограниченным множеством.*

*Доказательство.* От противного. Пусть компакт $X$ является неограниченным. Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n \in X \; |x_n| > n$. Очевидно, что любая подпоследовательность последовательности $(x_n)$ неограничена, а следовательно не сходится. Это противоречит компактности множества. Теорема доказана. □

***Критерий компактности*** **(5.2.4.)**
$X - \textit{компакт} \overset{df}{\Leftrightarrow} X - \textit{огр}. \wedge X \textit{ замкнуто}$
*Доказательство:*
$\Rightarrow$ *Пусть* $X$ *— компакт. По теореме об ограниченности компакта* $x$ *— огр. Докажем замкнутость.*
*Пусть* $x_0$ *— предельная точка* $X$. *Тогда* $\exists (x_n) : x_n \to x_0, x_n \neq x_0.$ *По определению компактности*
$\exists (x_{n_k}) : x_{n_k} \to x'_0 \in X$. *В то же время* $x_n \to x_0 \Rightarrow x_{n_k} \to x_0.$ *Следовательно,* $x_0 = x'_0 \in X$.

$\Leftarrow$ *Пусть* $X$ *— огр. и замкнуто. Возьмём* $(x_n)$. $\forall n \in \mathbb{N} \; x_n \in X \Rightarrow (x_n) - \textit{огр}. \Rightarrow$ *по теореме*
*Больцано — Вейерштрасса* $\exists (x_{n_k}) \; x_{n_k} \to x_0$, *причём* $x_0 \in X$, *т.к.* $X$ *замкнуто* $\Rightarrow X$ *— компакт.*
*Теорема доказана.*

## 31 Теорема о непрерывном образе компакта. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса.

Теорема о непрерывном образе компакта

**Теорема 5.2.6.** *(о непрерывном образе компакта). Пусть функция $f$ непрерывна на множестве $X$ и $X$ - компакт . Тогда $Y = f(X)$ тоже компакт.*

*Доказательство.* Пусть $(y_n)$ - последовательность точек множества $Y = f(X)$, и $\forall n \in \mathbb{N}$ точка $x_n \in X$ такова, что $f(x_n) = y_n$. Поскольку $X$ - компакт, то найдется подпоследовательность $x_{k_n} \to x_0 \in X$ при $n \to \infty$. В силу непрерывности функции в точке $x_0$ последовательность $y_{k_n} = f(x_{k_n}) \to f(x_0) = y_0 \in Y$. Это означает, что $Y$ - компакт. □

***Теорема о непрерывном образе компакта*** $(5.2.6.)$
*$f$ непр. на $X$, $X$ − компакт $\Rightarrow Y=f(X)$ − компакт*
*Доказательство*:
*Пусть $(y_n)$ − последовательность точек множества $Y=f(X)$, $\forall n\in\mathbb{N}\ x_n\in X\ f(x_n)=y_n$.*
*$X$ − компакт $\Rightarrow \exists x_{k_n} \rightarrow x_0\in X$. В силу непрерывности $f$ в т. $x_0$ $y_{k_n}=f(x_{k_n})\rightarrow f(x_0)=y_o\in Y\Rightarrow Y$ − компакт.*
*Теорема доказана.*

Первая теорема Вейерштрасса
Вторая теорема Вейерштрасса

**Следствие 1.** ( *Первая теорема Вейерштрасса*). *Если функция непрерывна на компакте, то она ограничена на нем.*

**Следствие 2.** ( *Вторая теорема Вейерштрасса*). *Если функция непрерывна на компакте, то она принимает на нем наименьшее и наибольшее значения.*

# 32 Равномерная непрерывность функции и теорема Кантора.

Определение равномерно непрерывной функции

**Определение 5.8.** *Функция $f$ называется равномерно непрерывной на множестве $X$, если*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0\ \forall x \in X\ \forall x' \in X\ (|x - x'| < \delta\ \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon). \tag{24}$$

***Теорема Кантора*** $(5.3.1.)$
*$f$ − непр. на компакте $X \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $X$*
*Доказательство*:
*От противного. Пусть $f$ непр. на $X$ и $\neg$(равномерно непрерывна на $X$). Тогда*
$\exists\, \epsilon_0>0\ \forall\, \delta>0\ \exists\, x', x''\in X\ (|x'-x''|<\delta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|\geq\epsilon_0)$
*Пусть $\delta_n=\frac{1}{n}$. Тогда $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists x'_n, x''_n |x'_n-x''_n|<\frac{1}{n}$, но $|f(x'_n)-f(x''_n)|\geq\epsilon_0$*
*$X$ − компакт $\rightarrow\exists x'_{k_n}\rightarrow x_0\in X$ и $\exists x''_{k_n}\rightarrow x_0\in X$.*
*$f$ − непр. $\Rightarrow f(x'_{k_n})\rightarrow f(x_0)\in X$ и $f(x''_{k_n})=f(x_0)\Rightarrow f(x'_{k_n})-f(x''_{k_n})\rightarrow 0\Rightarrow$ противоречие*
*Теорема доказана.*

# 33 Односторонние пределы. Точки разрыва функции и их классификация. Теорема об односторонних пределах монотонной функции.

$Пусть\, f\, определена\, в\, \overset{o}{O}(x_0).$

$x_0 - т.\, устранимого\, разрыва \overset{df}{\Leftrightarrow} \exists \lim_{x \to x_0} f(x), но\,(f\, не\, опр.\, в\, т.\, x_0 \vee \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0))$

$x_0 - т.\, разрыва\, первого\, рода \overset{df}{\Leftrightarrow} \exists f(x_0-0), f(x_0+0), но\, f(x_0-0) \neq f(x_0+0), \Delta f(x_0) = f(x_0-0) - f(x_0+0)$
$называют\, скачком\, функции$

$x_0 - т.\, разрыва\, второго\, рода \overset{df}{\Leftrightarrow} хотя\, бы\, один\, из\, односторонних\, пределов\, не\, сущ-т\, или\, равен\, \infty.$

***Теорема об односторонних пределах монотонной функции*** $\mathbf{(5.4.1.)}$

$Пусть\, f - монотонная\, на\,(a,b).\, Тогда\, \forall x_0 \in (a,b) \exists f(x_0-0), f(x_0+0).\, Более\, того,$
$если\, f \uparrow:$

$$f(x_0-0) = \sup_{x<x_0} f(x), f(x_0+0) = \inf_{x>x_0} f(x),$$
$$f(x_0-0) \le f(x_0) \le f(x_0+0)$$

$если\, f \downarrow:$

$$f(x_0-0) = \inf_{x<x_0} f(x), f(x_0+0) = \sup_{x>x_0} f(x),$$
$$f(x_0-0) \ge f(x_0) \ge f(x_0+0)$$

$Доказательство:$
$Рассмотрим\, случай\, f \uparrow.\, Докажем, что\, f(x_0-0) = \sup_{x<x_0} f(x).\, \{f(x): x < x_0\}\, огр.\, сверху \Rightarrow$
$\exists \sup_{x<x_0} f(x) = l, l \le f(x_0) \Rightarrow по\, опр.\, верхней\, грани:$
$1) \forall x < x_0\, f(x) \le l;$
$2) \forall \epsilon > 0 \exists x_\epsilon < x_0\, f(x_\epsilon) > l - \epsilon$
$f \uparrow \Rightarrow \forall x \in [x_\epsilon, x_0)\, выполняются\, неравенства\, l - \epsilon < f(x_\epsilon) \le f(x) \le l < l + \epsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = l$
$Остальное\, доказывается\, аналогично.$

# 34 Критерий непрерывности монотонной функции. Теорема о непрерывности обратной функции.

Критерий непрерывности монотонной функции

**Теорема 5.4.2.** *(критерий непрерывности монотонной функции). Пусть функция $f$ монотонна на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $f$ непрерывна тогда и только тогда, когда $f([a, b])$ есть отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$.*

*Доказательство.* Рассмотрим случай $f\uparrow$.

*Необходимость.* Утверждение справедливо в силу теоремы Коши о промежуточеых значениях функции, непрерывной на отрезке.

*Достаточность.*Будем рассуждать от противного. Пусть точка $c \in [a, b]$ является точкой разрыва функции $f\uparrow$. Следователно, $f(c-0) \neq f(c)$ или $f(c) \neq f(c+0)$. То есть хотя бы один из интервалов $(f(c-0), f(c))$ или $(f(c), f(c+0))$ не пуст, и в нем нет значений функции. Ввиду монотонности функции такой интервал содержится в отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Теорема о непрерывности обратной функции

**Теорема 5.4.3.** *(о непрерывности обратной функции). Пусть функция $f$ строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда существует обратная функция строго монотонная того же типа, определенная и непрерывная на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$.*

*Доказательство.* Пусть $f\uparrow\uparrow$. В силу предыдущей теоремы функция $f$ взаимно однозначно отображает отрезок $[a, b]$ на отрезок $[f(a), f(b)]$. Следовательно, существует обратная функция $f^{-1}$, очевидно, также возрастающая, отображающая отрезок $[f(a), f(b)]$ на отрезок $[a, b]$. Пользуясь предыдущей теоремой, так же делаем вывод, что функция $f^{-1}$ непрерывна. □

## 35 Дифференцируемость функции в точке, производная функции в точке. Непрерывность дифференцируемой функции.

*Пусть $f$ опр. на $X$, $x_0 \in X$ — предельная точка.*

$f$ — *дифференцируема в точке* $x_0 \overset{df}{\Leftrightarrow} \exists A(x)$ *непрерывная в точке* $x_0$, $\forall x \in X \; f(x) - f(x_0) = A(x)(x - x_0)$

$f'(x_0) = A(x_0)$ — *производная $f$ в т. $x_0$*

***Теорема о непрерывности дифференцируемой функции* (6.1.2.)**

$f$ — *дифф. в т.* $x_0 \Rightarrow f$ — *непр. в т.* $x_0$

*Доказательство:*

$f(x) - f(x_0) = A(x)(x - x_0) \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + A(x)(x - x_0)$

*По теореме о свойствах непр. функций $f(x)$ непр. в т. $x_0$*

*Теорема доказана.*

## 36 Теорема о дифференцируемости композиции.

**Теорема 6.1.3.** *(о дифференцируемости композиции). Если функция* $g$ *дифференцируема в точке* $x_0$, *а функция* $f$ *дифференцируема в точке* $y_0 = g(x_0)$, *то функция* $f \circ g$ *дифференцируема в точке* $x_0$ *и*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0). \tag{41}$$

*Доказательство.* Согласно определению дифференцируемости имеем:

$$f(y) - f(y_0) = A(y)(y - y_0), \quad g(x) - g(x_0) = B(x)(x - x_0),$$

где функции $A$ и $B$ непрерывны в точках $y_0$ и $x_0$ соответственно; причем

$$f'(y_0) = A(y_0), \quad g'(x_0) = B(x_0).$$

Рассмотрим приращение функции $f \circ g$

$$(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0) = f(g(x)) - f(g(x_0)).$$

Обозначив $y = g(x)$, имеем далее

$$\begin{aligned} f(g(x)) - f(g(x_0)) = f(y) - f(y_0) = A(y)(y - y_0) = \\ = A(g(x))(g(x) - g(x_0)) = (A \circ g)(x)B(x)(x - x_0). \end{aligned}$$

Обозначим $C(x) = (A \circ g)(x)B(x)$. Поскольку функция $g$, будучи дифференцируемой, является непрерывной в точке $x_0$, а функция $A$ непрерывна в точке $y_0 = g(x_0)$, то в силу теоремы о непрерывности композиции функция $A \circ g$ непрерывна в точке $x_0$. Далее, произведение непрерывных в точке $x_0$ функций $A \circ g$ и $B$ непрерывно в этой точке.

Итак, имеем равество

$$(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0) = C(x)(x - x_0),$$

где функция $C$ непрерывна в точке $x_0$. Согласно определению дифференцируемости, функция $f \circ g$ дифференцируема в точке $x_0$ и ее производная

$$(f \circ g)'(x_0) = C(x_0) = A(g(x_0))B(x_0) = f'(y_0)g'(x_0).$$

$\square$

## 37 Теорема об арифметических действиях над дифференцируемыми функциями.

**Теорема 6.1.4.** *(об арифметических действиях над дифференцируемыми функциями) Пусть функции $f$ и $g$ дифференцируемы в точке $x_0$. Тогда функции $f+g$, $fg$, и $f/g$ (при дополнительном условии, что функция $g$ в нуль не обращается) дифференцируемы в точке $x_0$.*

*Причем справедливы равенства*

*1)*
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0); \tag{42}$$

*2)*
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0); \tag{43}$$

*3)*
$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{44}$$

*Доказательство.* Согласно определению дифференцируемости имеем:

$$f(x) - f(x_0) = A(x)(x-x_0), \quad g(x) - g(x_0) = B(x)(x-x_0),$$

где функции $A$ и $B$ непрерывны в точке $x_0$ ; причем

$$f'(x_0) = A(x_0), \quad g'(x_0) = B(x_0).$$

Тогда

$$(f+g)(x)-(f+g)(x_0) = (f(x)-f(x_0))+(g(x)-g(x_0)) = (A(x)+B(x))(x-x_0).$$

Так как функция $A+B$ непрерывна в точке $x_0$, то $f+g$ дифференцируема в точке $x_0$ и

$$(f+g)'(x_0) = A(x_0) + B(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Далее, перемножив равенства

$$f(x) = f(x_0) + A(x)(x-x_0), \quad g(x) = g(x_0) + B(x)(x-x_0),$$

имеем

$$f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + [A(x)g(x_0) + B(x)f(x_0) + A(x)B(x)(x-x_0)](x-x_0)$$

Осталось заметить, что функция

$$C(x) = A(x)g(x_0) + B(x)f(x_0) + A(x)B(x)(x - x_0)$$

непрерывна в точке $x_0$. Поэтому $fg$ дифференцируема в этой точке и

$$(fg)'(x_0) = C(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Для доказательства дифференцируемости частного функций преобразуем его

$$\frac{f}{g} = (\frac{1}{g})f.$$

Используя рассмотренный выше пример и теорему о производной композиции функций, делаем заключение, что функция $\frac{1}{g}$ дифференцируема и справедливо равенство

$$(\frac{1}{g})'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Далее осталось воспользоваться доказанным утверждением теоремы относительно произведения функций. $\square$

## 38 Теорема о дифференцируемости обратной функции.

**Теорема 6.1.5.** *(о дифференцируемости обратной функции). Пусть функция $f$ обратима, существует производная $f'(x_0) \neq 0$, и обратная функция $f^{-1}$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда $f^{-1}$ дифференцируема в точке $y_0$ и*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{45}$$

*Доказательство.* Для функции $f$ имеем равенство

$$f(x) - f(x_0) = A(x)(x - x_0),$$

где функция $A$ непрерывна в точке $x_0$, $A(x_0) = f'(x_0) \neq 0$. В силу обратимости (взаимной однозначности) функци $f$ $\quad A(x) \neq 0\ \forall x \neq x_0$.

Используя соотношения

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \quad \text{и} \quad y_0 = f(x_0),$$

имеем

$$y - y_0 = A(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)),$$

или

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \frac{1}{A(f^{-1}(y))}(y - y_0)$$

Осталось заметить, что функция $C = A \circ f^{-1}$ непрерывна в точке $y_0$ и

$$C(y_0) = \frac{1}{A(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{A(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

## 39 Точки роста и убывания функции. Достаточное условие точек роста и точек убывания.

Определение точки роста функции

Определение точки убывания функции

**Определение 6.5.** *Точка $x_0$ называется точкой роста функции $f$, если*

$$\exists O(x_0) \quad \forall x \in O(x_0) \quad sign(f(x) - f(x_0)) = sign(x - x_0). \qquad (67)$$

*Точка $x_0$ называется точкой убывания функции $f$, если эта точка является точкой роста функции $(-f)$, т. е.*

$$\exists O(x_0) \quad \forall x \in O(x_0) \quad sign(f(x) - f(x_0)) = -sign(x - x_0). \qquad (68)$$

***Достаточное условие точек роста и точек убывания*** **(6.4.1.)**

$f'(x_0)>0 \, (f'(x_0)<0) \Rightarrow x_0 - \text{точка роста (убывания)}\, f$

*Доказательство*:

*По определению дифференцируемости функции*

$f(x)-f(x_o)=A(x)(x-x_0)$, где $A(x)$ непр. в т. $x_0$, $A(x_0)=f'(x_0)$

1) $f'(x_0)>0 \Rightarrow A(x_0)>0 \Rightarrow \exists O(x_0) \forall x \in O(x_0)\, A(x)>0 \Rightarrow \forall x \in O(x_0)$

$sign(f(x)-f(x_0))=sign(A(x)(x-x_0))=sign(x-x_0) \Leftrightarrow x_0 - \text{т. роста}$

2) $f'(x_0)<0 \Rightarrow A(x_0)<0 \Rightarrow \exists O(x_0) \forall x \in O(x_0)\, A(x)<0 \Rightarrow \forall x \in O(x_0)$

$sign(f(x)-f(x_0))=sign(A(x)(x-x_0))=-sign(x-x_0) \Leftrightarrow x_0 - \text{т. убывания}$

## 40 Точки локального экстремума. Теорема Ферма.

*Пусть $x_0$ — внутр. точка $D(f)$.*

$x_0 - \text{т. локального экстремума } f \overset{df}{\Leftrightarrow} \exists O(x_0) \forall x \in O(x_0)\, f(x) \le f(x_0) \, (f(x) \ge f(x_0))$

$x_0 - \text{т. строгого локального экстремума} \overset{df}{\Leftrightarrow} \exists \overset{o}{O}(x_0) \forall x \in \overset{o}{O}(x_0)\, f(x) < f(x_0) \, (f(x) > f(x_0))$

***Теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума*** **, 6.4.2.)**

$x_0 - \text{т. локального экстремума } f \text{ и } \exists f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0)=0$

*Доказательство*:

$x_0$ *не может быть точкой роста или точкой убывания* $\Leftrightarrow f'(x_0) \le 0 \wedge f'(x_0) \ge 0 \Leftrightarrow f'(x_0)=0$

*Теорема доказана*

# 41 Теорема Ролля.

**Теорема 6.4.3.** *(Ролля). Пусть функция $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале $(a, b)$ и $f(a) = f(b)$. Тогда найдется точке $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.*

*Доказательство.* Если $f \equiv const$, то $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) = 0$.

Пусть теперь $f$ не является тождественно константой.

В силу теорема Вейерштрасса функция $f$, непрерывная на отрезке, принимает на нем наименьшее значение в некоторой точке $x_1$ и наибольшее - в некоторой точке $x_2$. По крайней мере, одна из этих точек не совпадает с концами отрезка, и, значит, является внутренней точкой экстремума. Обозначим ее $c$. Согласно теореме Ферма $f'(c) = 0$. $\square$

# 42 Теоремы Коши и Лагранжа. Следствия теоремы Лагранжа.

Теорема Коши

Теорема Лагранжа

**Теорема 6.5.1.** *(Коши). Пусть функции $f$ и $g$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале $(a, b)$ и $\forall x \in (a, b) \quad g'(x) \neq 0$. Тогда $\exists c \in (a, b)$ такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{70}$$

*Доказательство.* Заметим, что в силу теоремы Ролля, $g(b) \neq g(a)$. Рассмотрим функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Нетрудно убедиться, что функция $F$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Тогда найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что $F'(c) = 0$, т.е.

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

$\square$

**Теорема 6.5.2.** *(Лагранжа). Пусть функция $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале $(a, b)$. Тогда найдется точке $c \in (a, b)$ такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{71}$$

*Доказательство.* Утверждение теоремы является частным случаем теоремы Коши при $g(x) = x$. $\square$

Теорема о постоянстве дифференцируемой функции

**Теорема 6.6.1.** *(о постоянстве дифференцируемой функции). Пусть $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) = 0$. Тогда $f \equiv const$ на $(a, b)$.*

*Доказательство.* Пусть точка $x_0$ - фиксированная точка интервала $(a, b)$, а $x$ - произвольная точка этого интервала. Условие теоремы позволяет воспользоваться теоремой Лагранжа на отрезке с концами $x$ и $x_0$. Тогда имеем

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

где точка $\xi$ лежит между точками $x$ и $x_0$.

Поскольку $f'(\xi) = 0$, то $f(x) = f(x_0)$. Это и означает, что $f \equiv const$ на $(a, b)$. $\square$

Критерий монотонности дифференцируемой функции

**Теорема 6.6.2.** *(критерий монотонности дифференцируемой функции). Пусть функция $f$ дифференцируема на интервале $(a, b)$. Тогда*

$$f \uparrow \quad (f \downarrow) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) \quad f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0).$$

*Доказательство.* 1) Достаточность. Пусть $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0)$, и $x_1$, $x_2$ - произвольные точки интервала $(a, b)$, удовлетворяющие условию $x_1 < x_2$. Применяя теорему Лагранжа, имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0 \quad (\leq 0) \quad (\text{где } x_1 < \xi < x_2).$$

А значит, $f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2))$, т.е. $f \uparrow \quad (f \downarrow)$.

2) Необходимость. Пусть $f \uparrow$ . Тогда по отношению к произвольной точке $x_0 \in (a, b)$ выполняется неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Переходя к пределу при $x \to x_0$, получим неравенство $f'(x_0) \geq 0$. Аналогично рассматривается случай $f \downarrow$ . $\square$

Достаточное условие строгой монотонности функции

**Теорема 6.6.3.** *( достаточное условие строгой монотонности функции). Если* $\forall x \in (a, b)\ f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0)$, *то* $f \uparrow\uparrow\ (f \downarrow\downarrow)$.

*Доказательство.* Рассуждение проводится по той же схеме, что и в предыдущей теореме. $\square$

## 43 Производные высших порядков. Формула Тейлора. Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа.

***Формула Тейлора*** **(6.7.1.)**

*f n — непр. дифф. на отрезке I с концами* $x_0, x$ *и* $\exists f^{(n+1)}$ *внутри него* $\Rightarrow \forall\ \phi(x)$*: непр. на* $I \wedge \exists\, \phi'(x) \neq 0$

$\exists\, \xi$ *внутри I такая, что*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x_0; x),\ \text{где}$$

$$r_n(x_0; x) = \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{\phi'(\xi) n!} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n$$

*Доказательство:*

*На отр. I рассмотрим вспомогательную функцию*

$$F(t) = f(x) - P_n(t; x) = f(x) - [f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + \ldots + \frac{f_{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n]$$

*Очевидно, что F непрерывна на отрезке I и дифф. внутри I, причём*

$$F'(t) = \frac{-f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n.$$

*Применяя к паре функций F, φ на отр. I теорему Коши,* $\exists\, \xi$ *внутри I, в которой выполняется*

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{\phi(x) - \phi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\phi'(\xi)}.$$

*Поскольку* $F(x) - F(x_0) = 0 - F(x_0) = -r_n(x_0; x)$ *и*

$$F'(\xi) = \frac{-f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n,$$

*то приходим к равенству*

$$r_n(x_0; x) = \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{\phi'(\xi) n!} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа

Взяв $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$, получаем

**Следствие 3** (форма Лагранжа остаточного члена).

$$r_n(x_0; x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}. \tag{76}$$

## 44 Формула Тейлора-Пеано.

***Лемма .***

$\phi$ $n-$*дифф.* *в т.* $x_0$ *и* $\phi(x_0)=\phi'(x_0)=...=\phi^{(n)}(x_0)=0 \Rightarrow \phi(x)=\overline{o}((x-x_0)^n)$ *при* $x \to x_0$

*Доказательство*:

*Докажем методом математической индукции .*

*Для* $n=1$ *в силу определения дифференцируемсоти* $\phi$ *в т.* $x_0$

$\phi(x)=\phi(x_0)+\phi'(x_0)(x-x_0)+\overline{o}(x-x_0)$ *при* $x \to x_0$

*Поскольку* $\phi(x)=\phi'(x)=...=\phi^{(n)}(x)=0$,

$\phi(x)=\overline{o}(x-x_0)$ *при* $x \to x_0$.

*Пусть доказательство верно для* $n=k-1$. *Докажем для* $n=k$.

*Поскольку* $(\phi')'(x)=...=(\phi')^{(k-1)}(x)=0$,

*по предположению индукции* $\phi'(x)=\overline{o}((x-x_0)^{(k-1)})$ *при* $x \to x_0$.

*По теореме Лагранжа*

$\phi(x)=\phi(x)-\phi(x_0)=\phi'(\xi)(x-x_0)=\alpha(\xi)(\xi-x_0)^{k-1}(x-x_0)$, *где*

$\xi$ *лежит между* $x$ *и* $x_0$, *т.е.* $|\xi-x_0|<|x-x_0|$, *а* $\lim_{\xi \to x_0} \alpha(\xi)=0$. *Тогда*

$|\phi(x)|\leq|\alpha(\xi)||x-x_0|^{k-1}|x-x_0|=|\alpha(\xi)||x-x_0|^k \Rightarrow$

$\Rightarrow \phi(x)=\overline{o}((x-x_0)^k)$ *при* $x \to x_0$.

*Лемма доказана .*

***Локальная формула Тейлора***

$f$ $n-$*дифференцируема в т.* $x_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\overline{o}((x-x_0)^n) \text{ при } x \to x_0.$$

*Доказательство*:

*Рассмотрим* $\phi(x)=f(x)-P_n(x_0;x)$ *и воспользуемся доказанной леммой .*

***Формула Тейлора – Пеано***

$r_n(x_0;x)=\overline{o}((x-x_0)^n)$ *при* $x \to x_0$ *называют*

*остаточным членом в форме Пеано .*

## 45 Правила Лопиталя.

Первое правило Лопиталя

**Теорема 6.8.1.** *(первое правило Лопиталя). Пусть функции $f$ и $g$ определены и дифференцируемы на интервале* $(a,b)$, $\quad \forall x \in (a,b) \quad g'(x) \neq 0$ *и*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = 0.$$

*Тогда если существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha,$$

*то существует и предел*

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha.$$

*Доказательство.* Доопределим функции в точке $a$

$$f(a) = g(a) = 0.$$

Пусть $(x_n)$ - последовательность такая, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in (a,b) \quad \text{и} \quad x_n \to a.$$

При любом натуральном $n$ на отрезке $[a, x_n]$ можем применить теорему Коши. Тогда найдутся точки $\xi_n \in (a, x_n)$ такие, что

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$$

или

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)},$$

так как $f(a) = g(a) = 0$.

Очевидно, что $\xi_n \to a$. Тогда в силу определения предела по Гейне и условия существования предела отношения производных имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \alpha,$$

и следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \alpha \quad \text{и} \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha.$$

$\square$

Второе правило Лопиталя

**Теорема 6.8.2.** *(второе правило Лопиталя). Пусть функции $f$ и $g$ определены и дифференцируемы на интервале $(a,b)$, $\forall x \in (a,b) \quad g'(x) \neq 0$ и*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = \infty.$$

*Тогда если существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha,$$

*то существует и предел*

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha.$$

# 46 Достаточные условия экстремума.

***Первое достаточное условие экстремума*** $(\mathbf{6.9.1.})$

*Пусть* $f$ *дифф. в* $\overset{o}{O}(x_0)$ *и непр. в* $x_0$. *Тогда*

$f'>0(<0)$ *слева от* $x_0$ *и* $f'<0(>0)$ *справа от* $x_0 \Rightarrow x_0 -$ *т. лок. максимума (минимума) функции* $f$.

*Производная имеет один и тот же знак слева и справа от т.* $x_0 \Rightarrow$ *экстремума нет.*

***Второе достаточное условие экстремума*** $(\mathbf{6.9.2})$

*Пусть* $f$ $2-$*дифф. в т.* $x_0$ *и* $f'(x_0)=0$. *Тогда*

$f''(x_0)<0 \Rightarrow x_0 -$ *локальный максимум* $f$

$f''(x_0)>0 \Rightarrow x_0 -$ *локальный минимум* $f$

*Доказательство:*

$f''(x_0)<0(>0) \Rightarrow x_0 -$ *т. убывания (роста)* $f$

$f'(x_0)=0 \Rightarrow \exists O(x_0)$, *где* $f'(x)$ *положительна (отр.) слева и отрицательна (пол.) справа от т.* $x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ *по первому достаточному условию экстремума* $x_0 -$ *локальный максимум (минимум* $f$*)*

***Третье достаточное условие экстремума*** $(\mathbf{6.9.3})$

*Пусть* $f$ $n-$*дифф. в т.* $x_0$ *и* $f'(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0.$

$n-$*чётн.:* $f^{(n)}(x_0)<0(>0) \Rightarrow x_0 -$ *т. локального максимума (минимума)*

$n-$*нечётн.:* $f^{(n)}(x_0)<0(>0) \Rightarrow x_0 -$ *т. убывания (роста)* $f$

*Доказательство*:
*По локальной формуле Тейлора*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\bar{o}((x-x_0)^n)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\alpha(x)(x-x_0)^n\text{, где }\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$$

*Пусть* $A(x)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\alpha(x)$.

*Пусть* $f^{(n)}(x_0)<0$ *и* $n$ *— чётн. Тогда*

$$\lim_{x\to x_0}A(x)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}<0 \text{ и } \exists \overset{o}{O}(x_0)\ \forall x\in\overset{o}{O}(x_0)\ A(x)<0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x)-f(x_0)=A(x)(x-x_0)^n<0\text{, т.е. } f(x)<f(x_0)\Rightarrow x_0 \text{ — т. лок. максимума.}$$

*Пусть* $f^{(n)}(x_0)<0$ *и* $n$ *— нечётн. Тогда*

$$sign(f(x)-f(x_0))=sign(A(x_0)(x-x_0)^n)=-sign(x-x_0)\text{, т.е. } x_0 \text{ — т. убывания } f.$$

*Остальные случаи доказываются аналогично.*

## 47 Выпуклые функции. Критерии выпуклости функции.

*Пусть* $f$ *опр. на* $(a,b)$.

$f$ *— выпуклая (выпуклая вниз)* $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ $\forall x_1,x_2\in(a,b)\ \forall \alpha_1,\alpha_2\geq 0\ \alpha_1+\alpha_2=1$ *имеет место неравенство*

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\leq\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)$$

$f$ *— вогнутая (выпуклая вверх)* $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ *имеет место обратное неравенство*

Если при $x_1\neq x_2$ и $\alpha_1\alpha_2\neq 0$ это неравенство является строгим, то функцию называют *строго выпуклой.*

Критерий выпуклости дифференцируемой функции

**Теорема 6.10.1.** *(критерий выпуклости дифференцируемой функции). Пусть функция $f$ дифференцируема на интервале $(a,b)$. Тогда*

$$f\text{ — выпуклая} \Leftrightarrow f'\uparrow.$$

*При этом условию $f'\uparrow\uparrow$ соответствует строгая выпуклость $f$.*

Критерий выпуклости 2-дифференцируемой функции

**Теорема 6.10.2.** *(критерий выпуклости 2-дифференцируемой функции). Пусть функция 2-дифференцируема на интервале $(a,b)$. Тогда*

$$f\text{ — выпуклая} \Leftrightarrow f''(x)\geq 0\quad \forall x\in(a,b).$$

# 48 Первообразная. Теорема о первообразной. Неопределенный интеграл и его простейшие свойства.

$Пусть\ f\ и\ F\ опр.\ на\ (a,b).$
$F - первообразная \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall x \in (a,b)\ F'(x) = f(x)$

$\boldsymbol{Теорема\ о\ первообразной}\ (\mathbf{7.1.1})$
$F - первообразная\ f\ на\ (a,b) \Rightarrow \forall C \in \mathbb{R}\ F + C - первообразная\ f\ на\ (a,b)$
$Доказательство:$
$\forall x \in (a,b)\ (F(x)+C)' = F'(x) + 0 = f(x)$
$Теорема\ доказана.$

$\int f(x)dx\ (неопределённый\ интеграл) \overset{df}{\Leftrightarrow} совокупность\ всех\ первообразных\ f\ на\ (a,b)$

$\boldsymbol{Простейшие\ свойства\ неопределённого\ интеграла}$
$1)\ d\int f(x)dx = f(x)dx$
$2)\ \int dF(x) = F(x) + C$
$Свойства\ линейности\ интеграла:$
$3)\ Аддитивность: \int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
$4)\ Однородность: \int cf(x)dx = c\int f(x)dx\ (c = const)$
$5)\ Линейность: \int (af(x)+bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$

# 49 Основные методы интегрирования: формула замены переменной и формула интегрирования по частям.

Формула замены переменной

**Теорема 7.3.1.** *(формула замены переменной). Пусть $f$ определена на интервале $(a, b)$ и*

$$\int f(t)dt = F(t) + C,$$

*а функция $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ дифференцируема. Тогда функция $(f \circ \varphi)\varphi'$ имеет на интервале $(\alpha, \beta)$ первообразную, причем*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C.$$

*Доказательство.* Для доказательства достаточно воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции

$$\big(F(\varphi(x))\big)' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

□

Формула интегрирования по частям

**Теорема 7.3.2.** *(формула интегрирования по частям). Пусть функции $f$ и $g$ дифференцируемы на интервале $(a, b)$ и функция $gf'$ имеет первообразную. Тогда функция $fg'$ имеет первообразную, причем*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

*Доказательство.* Согласно правилу дифференцирования произведения имеем

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Это означает, что функция $f(x)g(x)$ является первообразной функции $h(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Тогда в силу свойства линейности интеграла функция

$$f(x)g'(x) = h(x) - f'(x)g(x)$$

тоже имеет первообразную, причем

$$\int f(x)g'(x)dx = \int h(x)dx - \int g(x)f'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

$\square$

Балласт Григорьев Д. Е.
По мотивам рассказов Сахно Л. В.