# Ответы на вопросы экзамена по алгебре и геометрии

Инна Политучая (ver.1.1.0 от Евгений Мангасарян)

ver. 2.0.1 (22 января 2024) переработанная и дополненная

## Вопрос № 1.

Отношение эквивалентности. Теорема о разбиении множества с заданным отношением эквивалентности. Основные примеры отношений эквивалентности (свободный вектор как класс эквивалентности отношения конгруэнтности на множестве связанных векторов евклидова пространства; вычет как класс эквивалентности отношения сравнимости по mod n на множестве целых чисел).

**Вспом. определение 1.1.** $A \times B = (a, b), a \in A, b \in B$ — **прямое** или **декартово произведение**.

**Вспом. определение 1.1**. **Бинарным отношением** между элементами множеств A и B называется подмножество их декартового произведения.

$$\rho \subseteq A \times B$$

**Вспом. определение 1.2.** $\rho$ является **однородным бинарным отношением**, если

$$A = B, \rho \subseteq A \times A = A^2$$

и обозначается буквой $\rho$.

$$a\rho b \Leftrightarrow (a, b) \in \rho$$

**Вспом. свойство 1.1** (Свойства однородных бинарных отношений). Отношение, заданное на множестве $A$, называется

1. **рефлексивным**, если $\forall a \in A\ (a, a) \in \rho$.
2. **симметричным**, если $\forall a, b \in A\ (a, b) \in \rho \Rightarrow (b, a) \in \rho$.
3. **транзитивным**, если $\forall a, b, c \in A\ (a, b) \in \rho \wedge (b, c) \in \rho \Rightarrow (a, c) \in \rho$.
4. **антирефлексивным**, если $\forall a \in A\ (a, a) \in \rho$.
5. **антисимметричным**, если $\forall a, b \in A\ (a, b) \in \rho \wedge (b, a) \in \rho \Rightarrow a = b$.
6. **связным**, если $\forall a, b \in A\ (a, b) \in \rho \vee (b, a) \in \rho \vee a = b$.

**Определение 2.1.** Если однородное бинарное отношение является **рефлексивным, симметричным и транзитивным**, то оно называется **отношением эквивалентности** и обозначается буквой R.

$$aRb \Leftrightarrow (a, b) \in R$$

**Вспом. определение 2.1**. **Классом эквивалентности**, соответствующим отношению эквивалентности R на множестве A, называется подмножество

$$R(a) = \{b \in A : (a, b) \in R\}$$

*a* называется образующим элементом.

**Свойство 2.1.** Свойство классов эквивалентности.

1. Каждый класс эквивалентности содержит хотя бы один элемент. $\exists (a, a) \in R(a)$.
2. Если $b \in R(a)$, то $R(b) = R(a)$.
3. Различные классы эквивалентности не пересекаются.
4. Объединение всех классов эквивалентности дает множество A.
5.

**Теорема 3.1** (*о разбиении множества с заданным отношением эквивалентности*). Любое отношение эквивалентности порождает на множестве разбиение на классы эквивалентности.

*Доказательство.* Пусть $K_a$ — группа элементов из $A$, эквивалентных фиксированному элементу $a$. В силу **рефлексивности** $a \in K_a$. Покажем, что $\forall K_a\ \forall K_b$ или $K_a = K_b$, или не имеют общих элементов.

Пойдем от противного. Пусть

$$\exists c : c \in K_a \wedge c \in K_b,$$

т.е. $\exists c : c \sim a \wedge c \sim b$. В силу **транзитивности** $a \sim b$, а в силу **симметричности** $b \sim a$. Тогда $\forall x \in K_a\ (x \sim a) \Rightarrow x \in K_b\ (x \sim b)$. Таким образом, две группы, имеющие хотя бы один общий элемент, полностью совпадают, хотя предполагалось, что $K_a \neq K_b$. Было получено разбиение на классы.

**Теорема 3.2** (*об отношении эквивалентности на разбиении множества / обратная*). Любое разбиение множества на классы задает на этом множестве отношение эквивалентности.

*Доказательство*. Докажем обратную теорему. Пусть $(B_i)$, где $i \in I$, — некоторое разбиение множества $A$. Рассмотрим отношение $\rho$ такое, что

$$x \sim_\rho y \Leftrightarrow \exists i \in I\ (x \in B_i \wedge y \in B_i)$$

Введенное отношение **рефлексивно** и **симметрично**. Если $\forall x, y, z\ x \sim_\rho y \wedge y \sim_\rho z$, то в силу определения отношения $\rho$ $x, y, z$ принадлежат одному и тому же элементу разбиения $B_i$. Следовательно, $x \sim_\rho z$ и отношение $\rho$ **транзитивно**.

Таким образом, $\rho$ — **отношение эквивалентности** на $A$.

**Вспом. определение 3.1.** Ненулевые связанные векторы **конгруэнтны**, если их длины и направления **совпадают**.

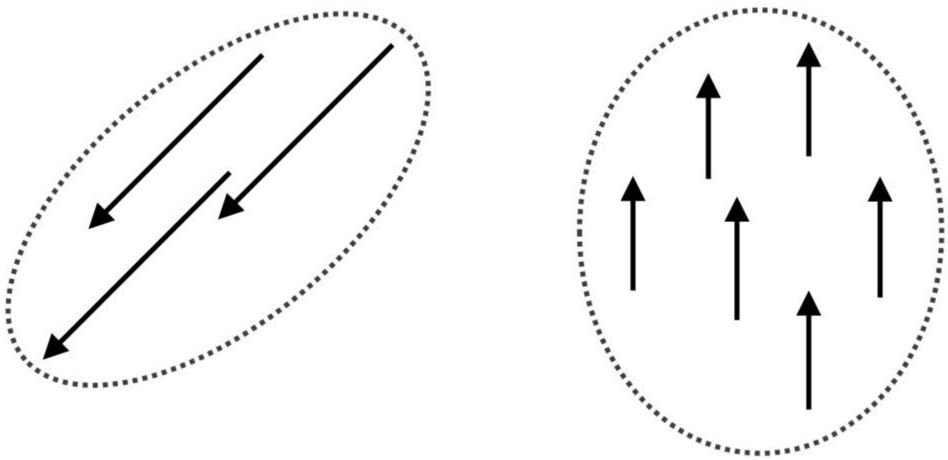


Рис. 1: Два свободных вектора.

**Пример 3.1** (*свободный вектор как класс эквивалентности отношения конгруэнтности на множестве связанных векторов*). **Свободный вектор** — это класс отношения **конгруэнтности** связанных векторов. (см. Рисунок 1)

**Пример 3.2** (*вычет как класс эквивалентности отношения сравнимости по mod n на множестве целых чисел*).

$$\mathrm{Z_n} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{\mathrm{n}-1}\}$$

или

$$\mathrm{Z_n} = \{[0]_n, [1]_n, \ldots, [\mathrm{n}-1]_n\}$$

В данном случае классы эквивалентности называются **классами вычетов**.

# Вопрос № 2.

Определение группы. Абелевы группы (аддитивная, мультипликативная).

**Определение 4.1. Группой** называется замкнутое множество $G$ с операцией умножения, обладающей следующими свойствами:

1. Ассоциативность. $\forall a, b, c \in G\ a(bc) = (ab)c.$
2. Существование единицы. $\forall a \in G\ ae = ea = a.$
3. Существование обратного элемента. $\forall a \in G\ a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e.$

**Определение 4.2. Аддитивной абелевой** группой называется множество $A$ с операцией сложения, обладающей следующими свойствами:

1. Коммутативность. $\forall a, b \in A\ a + b = b + a.$
2. Ассоциативность. $\forall a, b, c \in A\ a + (b + c) = (a + b) + c.$
3. Существование нуля. $\forall a \in A\ a + e = e + a = a.$
4. Существование обратного элемента. $\forall a \in A\ a + (-a) = (-a) + a = e.$

**Определение 4.3. Мультипликативной абелевой** группой называется множество B с операцией умножения, обладающей следующими свойствами:

1. Коммутативность. $\forall a, b \in B\ ab = ba.$
2. Ассоциативность. $\forall a, b, c \in A\ a(bc) = (ab)c.$
3. Существование единицы. $\forall a \in A\ ae = ea = a.$
4. Существование обратного элемента. $\forall a \in A\ a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e.$

# Вопрос № 3.

Основные примеры: числовые множества относительно операций умножения и сложе-ния, группа свободных векторов по сложению, матричные группы (полная линейная группа, специальная линейная группа, ортогональная группа, специальная ортогональная группа).

**Пример 5.1** (*множество целых чисел относительно операции сложения*).

$$< Z, + >$$

$\forall a, b, c \in Z$:

1. Выполняется замкнутость.
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. $a + 0 = 0 + a = a$.
4. $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

**Пример 5.2** (*множество рациональных чисел без нуля относительно определенной операции умножения*).

$$<Q^*, \circ>, Q^* = Q\backslash\{0\}, a \circ b = \frac{a\ b}{2} (\forall a, b \in Q^*)$$

1. Выполняется замкнутость.
2. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.
3. $a \circ e = e \circ a = a, e = 2$.
4. $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e, a^{-1} = \frac{4}{a}$.

**Пример 5.3** (*группа свободных векторов по сложению).*

$$< V, + >,$$

$V$ — множество свободных векторов, + — операция сложения свободных векторов. Проверим

1. Замкнутость: $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.
2. Ассоциативность: $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2) = (b_1, b_2) + (a_1, a_2)$.
3. Существование нуля: $(a_1, a_2) + (0, 0) = (0, 0) + (a_1, a_2) = (a_1, a_2)$.
4. Существование обратного: $(a_1, a_2) + (-a_1, -a_2) = (-a_1, -a_2) + (a_1, a_2) = (0, 0)$.

**Определение 5.1. Полная** (общая) **линейная группа** состоит из всех $n \times n$ обратимых матриц.

$GL(n, \mathrm{R}) = GL(n) = \{X \in M(n) : \det X \neq 0\}$

**Определение 5.2. Специальная линейная группа** состоит из $n \times n$ матриц с единич-ным определителем.

$SL(n, \mathrm{R}) = SL(n) = \{X \in M(n) : \det X = 1\}$

- Геометрически такие матрицы соответствуют линейным операторам $v \to \mathrm{X}_v$, сохраняющим стандартный объем и ориентацию в $\mathrm{R}^n$.

**Определение 5.3. Ортогональная группа** образована $n \times n$ ортогональными матрицами.

$$O(n) = \{X \in M(n) : XX^T = Id\}$$

Id — единичная матрица, Xт — транспонированная матрица X.

- Ортогональные преобразования $v \to \mathrm{X}_v$ сохраняют евклидову структуру в $\mathrm{R}^n$. В силу того, что $1 = \det(\mathrm{XX}^\mathrm{T}) = \det^2\mathrm{X}$, ортогональные матрицы имеют определитель $\det X = \pm 1$.

**Определение 5.4. Специальная ортогональная группа** состоит из ортогональных матриц $n \times n$, определитель которых равен 1.

$SO(n) = \{X \in M(n) : XX^T = Id, \det X = 1\}$

- Специальные ортогональные преобразования $v \to \mathrm{X}_v$ сохраняют как евклидову структуру, так и ориентацию в $\mathrm{R}^n$.

# Вопрос № 4.

Линейно зависимые и линейно независимые векторы (определение, свойства).

**Определение 6.1.** Выражение вида $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n$ называется линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in V$ и чисел $\lambda_i \in R$, $i \in N$.

**Определение 6.2**. Векторы $a_1, \ldots, a_n$ называются **линейно-зависимыми**, если $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$ и $\exists i : \lambda_i \neq 0$. Если $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$ при $\forall i \in N$ $\lambda_i = 0$, то $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ называются **линейно-независимыми**.

**Свойство 6.1** (*линейно-зависимых векторов*). Векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ **линейно-зависимы** $\Leftrightarrow$ хотя бы один из них **линейно выражается** через остальные.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$. Пусть векторы $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n$ — линейно-зависимы Значит $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$. Пусть $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow$

$$\lambda_1 \vec{a}_1 = -\lambda_2 \vec{a}_2 - \ldots - \lambda_n \vec{a}_n$$

$$\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \vec{a}_n$$

То $\vec{a}_1$ линейно выражается через $\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

$\Leftarrow$

$$1 \cdot \vec{a}_1 = \mu_2 \vec{a}_2 + \ldots + \mu_n \vec{a}_n$$

$$-1 \cdot \vec{a}_1 + \mu_2 \vec{a}_2 + \ldots + \mu_n \vec{a}_n = 0.$$

**$-1 \neq 0$**. Следовательно векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ **линейно-зависимы** по определению.
Доказано.

**Теорема.** (*связь линейно-зависимых и линейно-независимых*). Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ – **линейно-независимы.** $\vec{b}$ линейно выражается через $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \Longleftrightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ – **линейно-зависимы.**

*Доказательство.*

$\Rightarrow$

$$\vec{b} = \mu_1 \vec{a}_1 + \mu_2 \vec{a}_2 + \ldots + \mu_n \vec{a}_n$$

$$1 \cdot \vec{b} - \mu_1 \vec{a}_1 - \mu_2 \vec{a}_2 - \ldots - \mu_n \vec{a}_n = 0$$

**$1 \neq 0$**. Следовательно векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ **линейно-зависимы** по определению.

$\Leftarrow$ Пусть $\mu_1 \vec{a}_1 + \mu_2 \vec{a}_2 + \ldots + \mu_n \vec{a}_n + \mu' \vec{б}$ – линейно-зависимы. Тогда $\mu_1 \vec{a}_1 + \mu_2 \vec{a}_2 + \ldots + \mu_n \vec{a}_n + \mu' \vec{б} = 0$. Пусть $\mu' \neq 0$.

$$\vec{б} = -\frac{\mu_2}{\mu'}\vec{a}_1 - \ldots - \frac{\mu_n}{\mu'}\vec{a}_n$$

Значит, $\vec{б}$ **линейно выражается** через $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.
Доказано.

**Теорема**. (*единственность выражения вектора через линейно независимые векторы*) Пусть $\vec{б}$ линейно выражается через $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$. Это выражение единственно $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ **линейно-независимы**.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ Пусть $\vec{б}$ допускает два разложения.

$$\vec{б} = \mu_1 \vec{a}_1 + \mu_2 \vec{a}_2 + \ldots + \mu_n \vec{a}_n = \vec{б} = \mu_1' \vec{a}_1 + \mu_2' \vec{a}_2 + \ldots + \mu_n' \vec{a}_n$$

$$\underbrace{(\mu_1 - \mu_1')}_{\neq 0} \vec{a}_1 + \ldots + \underbrace{(\mu_n - \mu_n')}_{\neq 0} \vec{a}_n = 0.$$

или …

Значит, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ **линейно-зависимы**. (выполнено $\neg B \to \neg A$).

$\Leftarrow$ Пусть $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$ линейно-зависимо. Тогда $\vec{б} = (\lambda_1 + \mu_1') \vec{a}_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n') \vec{a}_n$ – другое разложение. Значит при линейно-зависимом выражении разложение $\vec{б}$ не единственно. (выполнено $\neg A \to \neg B$).

Доказано.

# Вопрос № 5.

Признаки коллинеарности и компланарности геометрических векторов.

**Вспом. определение 7.1. Свободные векторы** для краткости называют просто «векторами».

**Вспом. определение 7.2.** Два или большее число векторов называются **коллинеарными**, если их представители с общим началом лежат на одной прямой.

$\vec{a} \parallel \vec{b}$

**Вспом. определение 7.3.** Три или большее число векторов называются **компланарными**, если их представители с общим началом лежат в одной плоскости.

$Cp(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

**Теорема.** (*1-ый признак коллинеарности*). $\vec{a} \parallel \vec{b} \Longleftrightarrow \exists$ (единственный) $\lambda \in R$: $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, $b \neq 0$.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, \Rightarrow \lambda = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \quad \Rightarrow |\lambda| \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}|$$

$$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}, \Rightarrow \lambda = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \quad \text{Значит } \vec{a} = \lambda \vec{b}$$

*Единственность.*

Предположим, что $\vec{a} = \lambda_1 \vec{b}$, $\lambda_1 \in R$, $\lambda_1 \neq \lambda$

$$\underbrace{(\lambda - \lambda_1)}_{\neq 0} \underbrace{\vec{b}}_{\neq 0} = 0.$$

$\Rightarrow$ Противоречие $\Rightarrow \lambda$ – единственно.

$\Leftarrow$

$$\vec{a} = \lambda \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \text{ (по определению умножения вектора на число)}$$

<u>Доказано.</u>

**Теорема** (*2-ой признак коллинераности*). $\vec{a} \parallel \vec{б} \Longleftrightarrow \vec{a}, \vec{б}$ – **линейно-зависимы**.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$

$$\vec{a} \parallel \vec{б} \Rightarrow 1 \cdot \vec{a} = \lambda \vec{б}$$
$$1 \cdot \vec{a} - \lambda \vec{б} = 0$$
$$1 \neq 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{б} \text{ – } \textbf{линейно-зависимы}.$$

$\Leftarrow$

$\vec{a}$, $\vec{б}$ — **линейно-зависимы**. => $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 = 0$. Пусть $\lambda_1 \neq 0$.

Тогда $\vec{a}_1 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{б}$ => $\vec{a} \parallel \vec{б}$

Доказано.

**Свойство 7.2** (признак компланарности векторов). Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow$ они линейно зависимы.

$$\vec{b} \neq \vec{0},\ \vec{c} \neq \vec{0},\ Cp(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ \vec{a} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}$$

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ 1) Если $\vec{a} \parallel \vec{б}$.

$\vec{a} \parallel \vec{б} \Rightarrow \vec{a}, \vec{б}$ – **линейно-зависимы**. Тогда $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{б} = 0$, причем $\lambda_1 \neq 0$ или $\lambda_2 \neq 0$. Тогда $\lambda \vec{a}$

$+ \lambda \vec{б} + 0 \vec{c} = 0$. => $\vec{a}$, $\vec{б}$, $\vec{c}$ **линейно-зависимы**.

2) Если $\vec{a} \nparallel \vec{б}$, $Cp(a, b, c)$.

По теореме о разложении вектора на плоскости исходя из компланарности данных векторов:

$\vec{c} = c_1 \vec{a} + c_2 \vec{б}$.

=> $1 \vec{c} - c_1 \vec{a} - c_2 \vec{б} = 0$

Значит $\vec{a}$, $\vec{б}$, $\vec{c}$ – линейно-зависимы.

$\Leftarrow$

Пусть $\vec{a}$, $\vec{б}$, $\vec{c}$ – линейно-зависимы. Тогда $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{б} + \lambda_3 \vec{c} = 0$. Пусть $\lambda_3 \neq 0$. Тогда $\vec{c} = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3} \vec{a}_1 - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_3} \vec{a}_2$

Следовательно, $Cp(\vec{a}, \vec{б}, \vec{c})$.

Доказано.

# Вопрос № 6.

Разложение вектора на плоскости и в пространстве. Базис на плоскости, в простран-стве. Координаты, действия с векторами в координатах.

**Вспом. определение 8.1. Векторным (линейным) пространством** над полем $K$ называется множество $V$ с операциями сложения и умножения на элемент поля $K$, обладающая следующими свойствами:

1. $V$ — аддитивная абелева группа.
2. $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b,\ \lambda \in K,\ a, b \in V$.
3. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a,\ \lambda, \mu \in K,\ a \in V$.
4. $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$.
5. $1 \cdot a = a$.

**Пример 8.1** (векторного пространства над полем). Множество матриц размера $m \times n$ с операцией матричного сложения и умножения матриц на число образует векторное пространоство над полем $\mathbb{R}$.

**Теорема 8.1** (о разложении вектора на плоскости). Если векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ неколлинеарны, то всякий компланарный с ними вектор $\vec{a}$ можно разложить по векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ единственным образом.

*Доказательство.* В случае, когда $\vec{a} \parallel \vec{e}_1$, по свойству коллинеарных векторов $\exists \lambda \in \mathbb{R}\ \vec{a} = \lambda\vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2$.

Пусть теперь $\vec{a} \nparallel \vec{e}_1,\ \vec{a} \nparallel \vec{e}_2$. Рассмотрим представителей $\vec{a}$, $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, выходящих из одной точки $O$. Тогда $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$. Построим параллелограмм $OBAC$ с диагональю на $\overrightarrow{OA}$. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. То есть $\overrightarrow{OB} \parallel \overrightarrow{OE_1}$ и $\overrightarrow{OC} \parallel \overrightarrow{OE_2} \Rightarrow$

$$\overrightarrow{OA} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{OE_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{OE_2} \Rightarrow \vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Докажем единственность данного разложения. Пойдем от противного. Пусть $\exists \lambda_1' \neq \lambda_1,\ \exists \lambda_2' \neq \lambda_2 :\ \vec{a} = \lambda_1'\vec{e}_1 + \lambda_2'\vec{e}_2$. Получается, что

$$\vec{a} - \vec{a} = \lambda_1'\vec{e}_1 - \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2'\vec{e}_2 - \lambda_2\vec{e}_2$$
$$\vec{0} = \vec{e}_1(\lambda_1' - \lambda_1) + \vec{e}_2(\lambda_2' - \lambda_2)$$

$\vec{e}_1 \neq 0$, $\vec{e}_2 \neq 0$ и $\vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2 \Rightarrow \vec{e}_1 \neq \vec{e}_2$. Значит,

$$\begin{cases} (\lambda_1' - \lambda_1) = 0 \\ (\lambda_2' - \lambda_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1' = \lambda_1 \\ \lambda_2' = \lambda_2 \end{cases},$$

что противоречит нашему предположению. Поэтому такое разложение единственно. □

**Теорема 8.2** (разложение вектора в пространстве)**.** Всякий вектор $\vec{a}$ пространства можно разложить по трем некомпланарным векторам.

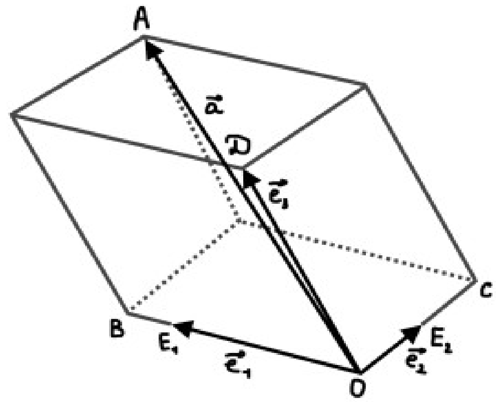



Рис. 2: Разложение вектора в пространстве

*Доказательство.* Пусть даны три вектора $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{e}_2 \neq \vec{0}$, $\vec{e}_3 \neq \vec{0}$ такие, что $\neg Cp(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, и $\vec{a} \neq 0$ — произвольный вектор пространства.

Рассмотрим случай, когда $Cp(\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Тогда по теореме о разложении вектора на плоскости $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3$.

Пусть теперь $\vec{a}$ некомпланарен ни с какой парой векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Выберем точку $O$ пространства и рассмотрим представителей векторов $\vec{a}$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, выходящих из нее:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1,\ \overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2,\ \overrightarrow{OE_3} = \vec{e}_3.$$

Рассмотрим параллелепипед, построенный на данных векторах (см. Рисунок 2). Тогда

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}.$$

По построению $\overrightarrow{OB} \parallel \overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OC} \parallel \overrightarrow{OE_2}$, $\overrightarrow{OD} \parallel \overrightarrow{OE_3} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \parallel \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OC} \parallel \vec{e}_2$, $\overrightarrow{OD} \parallel \vec{e}_3 \Rightarrow$

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\ \vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3.$$

Докажем единственность разложения. Пусть существуют два различных разложения вектора $\vec{a}$

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3;\ \vec{a} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3.$$

Тогда

$$a_1 - b_1 \neq 0 \vee a_2 - b_2 \neq 0 \vee a_3 - b_3 \neq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a_1 - b_1)\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\vec{e}_2 + (a_3 - b_3)\vec{e}_3 = 0 \Rightarrow$$

векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ линейно зависимы $\Rightarrow$ компланарны, что противоречит условию теоремы. Значит, разложение единственно. □

**Определение.** (*базис*). **Базисом** на плоскости (пространстве) называется упорядоченная **система векторов**, **максимально линейно-независимая**, каждый вектор плоскости (пространства) **линейно выражается** через эту систему векторов. Ниже схематически записаны **условия, при которых векторы образуют базис**:

1) На плоскости с векторами $\vec{e}_1(x_1, y_1)$, $\vec{e}_2(x_2, y_2)$ => $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$

2) В пространстве с векторами $\vec{e}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{e}_2(x_2, y_2, z_2)$ => $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$

**Разложение** вектора **по базису** называется **координатами.**

1) **На плоскости**, где $\vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2$; $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $(\vec{e}_2, \vec{e}_1)$ – **базисы.**

Тогда вектор $\vec{a}$ можно разложить по базисам следующим образом:

$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ (результатом станет $\vec{a}(a_1, a_2)$)

$\vec{a} = a_2\vec{e}_2 + a_1\vec{e}_1$ (результатом станет $\vec{a}(a_2, a_1)$)

2) **В пространстве**, где $\neg Cp(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\vec{e}_1(1, 0, 0)$, $\vec{e}_2(0, 1, 0)$, $\vec{e}_3(0, 0, 1)$ – **базисы**.

Применяется формула $\vec{f}_i = c_i^k \vec{e}_k$

**Определение.** (**ортонормированный базис**) Базисы называются ортонормированными, когда **верны** следующие **свойства** (при $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – базисы):

1. $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

2. $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$

**Свойства** (*векторов в базисе в плоскости и в пространстве*) Пусть $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$, где $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – базис. Высказывания ниже будут приведены для **плоскости**, но они так же **верны для пространства**.

1. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$

2. $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

3. $\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2)$

При $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$; $\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2$:

4. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{e}_1(a_1 + b_1) + \vec{e}_2(a_2 + b_2)$

Пример разложения вектора по базису.

**Задача 2.** **Показать, что векторы *a1, a2, a3* образуют базис трехмерного векторного пространства, и разложить вектор *b* по этому базису (при решении системы линейных алгебраических уравнений использовать метод Крамера).**

**1) *a1 (3; 1; 5), a2 (3; 2; 8), a3 (0; 1; 2), b (−3; 1; 2).***

Решение: Сначала рассмотрим систему векторов *a1, a2, a3* и проверим определитель матрицы *A*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

построенной на векторах отличных от нуля. Матрица содержит один нулевой элемент, поэтому детерминант целесообразнее вычислять как расписание по первому столбцу или третей строчке.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 3(2\cdot 2 - 8\cdot 1) - 3(1\cdot 2 - 5\cdot 1) = -12 + 9 = -3$$

В рекзультаье вычислений получили что определитель отличен от нуля, следовательно **векторы *a1, a2, a3* линейно независимы**.

Согласно определению векторы образуют базис в *R3*. Запишем расписание вектора *b* по базису

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_3$$

Векторы равны, когда их соответствующие координаты равны.

Поэтому из векторного уравнения получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = -3; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решим СЛАУ **методом Крамера** . Для этого запишем систему уравнений в виде

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 8 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Главный определитель СЛАУ всегда равен определителю составленному из векторов базиса

$$\Delta = 3\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 5 + 0\cdot 1\cdot 8 - (0\cdot 2\cdot 5 + 3\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 8) =$$
$$= 12 + 15 + 0 + 0 - 6 - 24 = -3.$$

Поэтому на практике его не исчисляют дважды. Для нахождения вспомогательных определителей ставим столбец свободных членов на место каждого столбца главного определителя. Определители вычисляем по правилу треугольников

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -3\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 2 + 0\cdot 1\cdot 8 -$$
$$-(0\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 2 + (-3)\cdot 1\cdot 8) = -12 + 6 - 6 + 24 = 12;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 2 + (-3)\cdot 1\cdot 5 + 0\cdot 1\cdot 2 -$$
$$-(0\cdot 1\cdot 5 + (-3)\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 2) = 6 - 15 + 6 - 6 = -9;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 5 + (-3)\cdot 1\cdot 8 -$$
$$-((-3)\cdot 2\cdot 5 + 3\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 8) = 12 + 15 - 24 + 30 - 6 - 24 = 3.$$

Подставим найденые определители в формулу Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{-3} = -4;$$
$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-9}{-3} = 3;$$
$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{3}{-3} = -1.$$

Итак, разложение вектора *b* по базису имеет вид *b=-4a1+3a2-a3*. Координатами вектора *b* в базисе *a1, a2, a3* будут *(-4,3,-1)*.

# Вопрос № 7.

Признаки коллинеарности и компланарности векторов в координатах.

**Теорема 9.1** (признак коллинеарности векторов в координатах). Пусть $\vec{a}(a^1, a^2)$, $\vec{b}(b^1, b^2)$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Тогда

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a^1}{a^2} = \frac{b^1}{b^2}$$

Отсюда

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} = 0$$

*Доказательство.*
$\Rightarrow$. Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Из правила умножения вектора на число следует, что $a^1 = \lambda b^1$, $a^2 = \lambda b^2$. То есть $\lambda = \frac{a^1}{b^1} = \frac{a^2}{b^2}$.
$\Leftarrow$. Нетрудно доказать достаточность, если предположить, что $\frac{a^1}{a^2} = \frac{b^1}{b^2} = \lambda$. □

Справедливо аналогичное утверждение относительно компланарных векторов:

**Теорема 9.2** (признак компланарности векторов в координатах). Пусть $\vec{a}(a^1, a^2, a^3)$, $\vec{b}(b^1, b^2, b^3)$, $\vec{c}(c^1, c^2, c^3)$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$. Тогда

$$Cp(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 0$$

*Доказательство.*

$Cp(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – **линейно-зависимы**. Тогда пусть $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$, где или $\alpha \neq 0$ или $\beta \neq 0$ или $\gamma \neq 0$.

$$\begin{cases} \alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{b}_1 + \gamma\vec{c}_1 = 0, \\ \alpha\vec{a}_2 + \beta\vec{b}_2 + \gamma\vec{c}_2 = 0, \\ \alpha\vec{a}_3 + \beta\vec{b}_3 + \gamma\vec{c}_3 = 0. \end{cases}$$

Для того, чтобы однородная система имела **ненулевое решение**, необходимо и достаточно, чтобы **определитель** матрицы коэффициентов был равен **нулю**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$$

☺

# Вопрос № 8.

Радиус-вектор точки. Деление отрезка в данном отношении.

**Определение 10.1.** Назовем фиксированную точку $O$ **началом** или **полюсом**. **Радиус-вектором** $\vec{r}_A$ точки $A$ называется вектор $\overrightarrow{OA}$, определяемый точками $O$ и $A$.

$$\vec{r}_A \text{ является радиус-вектором точки } A \Leftrightarrow A(\vec{r}_A)$$

**Свойство 10.1.** Каждый вектор $\overrightarrow{AB}$ равен разности радиус-векторов точек $B$ и $A$.

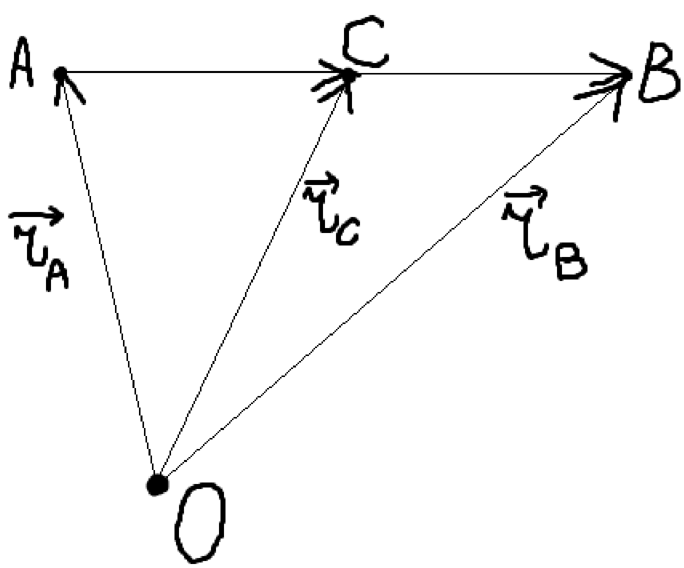
**Теорема 10.1** (деление отрезка в данном отношении). Если даны две точки $A(\vec{r}_A)$ и $B(\vec{r}_B)$, то точка $C$ делит отрезок $AB$ в отношении $\lambda$, то есть

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \lambda \Leftrightarrow \vec{r}_C = \frac{\vec{r}_A + \lambda\vec{r}_B}{1+\lambda}$$

В частности, если $M$ — середина отрезка $AB$, то

$$\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2}$$

*Доказательство.*




Пусть точка C делит отрезок AB в отношении λ, так что AC = λCB. Тогда:

$\overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A$, $\overrightarrow{CB} = \vec{r}_B - \vec{r}_C$

$$\vec{r}_C - \vec{r}_A = \lambda(\vec{r}_B - \vec{r}_C)$$

$$\vec{r}_C + \lambda \vec{r}_C = \vec{r}_A + \lambda\vec{r}_B$$

$$\vec{r}_C = \frac{\vec{r}_A + \lambda\vec{r}_B}{1 + \lambda}$$

# Вопрос № 9.

Скалярное произведение векторов и его свойства.

**Определение 11.1. Скалярным произведением** $(\vec{a}, \vec{b})$ двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин перемножаемых векторов и косинуса угла между ними.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \widehat{\vec{a}\vec{b}}$$

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, то полагают, что $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

## 11.1 Геометрические свойства скалярного произведения

**Свойство 11.1.** Скалярное произведение обращается в нуль $\Leftrightarrow$ сомножители взаимно перпендикулярны.

**Свойство 11.2.** Скалярное произведение положительно, если угол между сомножителями острый, и отрицательно, если угол тупой.

**Свойство 11.3.** Скалярное произведение ненулевых векторов равно длине одного из сомножителей, умноженной на численное значение ортогональной проекции другого сомножителя на орт первого сомножителя (см. Рисунок 3).

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| proj_{\vec{a}^\circ} \vec{b} = |\vec{b}| proj_{\vec{b}^\circ} \vec{a}$$

Численное значение ортогональной проекции вектора $\vec{a}$ на единичный вектор $\vec{i}$ совпадает со скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{i}$.

$$proj_{\vec{i}} \vec{a} = (\vec{a}, \vec{i})$$

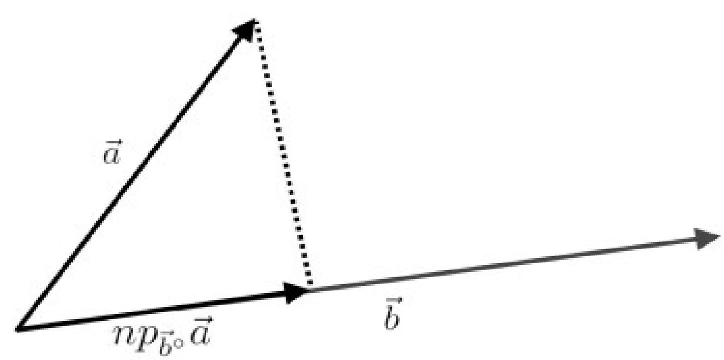



Рис. 3: Свойство скалярного произведения векторов

**Свойство 11.4.** Скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{a})$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$.

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

**Свойство 11.5.** Косинус угла между двумя ненулевыми векторами равняется скалярному произведению данных векторов, деленному на произведение их длин.

$$\cos \widehat{\vec{a}\vec{b}} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\sqrt{\vec{a}^2}\sqrt{\vec{b}^2}}$$

## 11.2 Формальные свойства скалярного произведения

**Свойство 11.6.** Скалярное произведение коммутативно.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$$

**Свойство 11.7.**

$$\lambda(\vec{a}, \vec{b}) = (\lambda\vec{a}, \vec{b})$$

**Свойство 11.8.** Скалярное произведение дистрибутивно относительно операции векторного сложения.

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$$

# Вопрос № 10.

Численное значение проекции вектора на вектор. Выражение скалярного произведе-ния в координатах. Применение скалярного произведения в геометрии.

## 12.1 Численное значение проекции вектора на вектор

**Вспом. определение 12.1.** На плоскости **проекцией вектора** $\vec{a}$ на прямую проекции $l$ или на вектор $\vec{b} \neq \vec{0}$ параллельно направляющей прямой $h \neq l$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий двум условиям (см. Рисунок 4):

1. $\vec{c} \parallel l$ или, соответственно, $\vec{c} \parallel \vec{b}$ и
2. $\vec{a} - \vec{c} \parallel h$.

Этот вектор обозначается символами

$$Proj_l\vec{a}(\parallel h) \text{ или } Proj_{\vec{b}}\vec{a}(\parallel h)$$

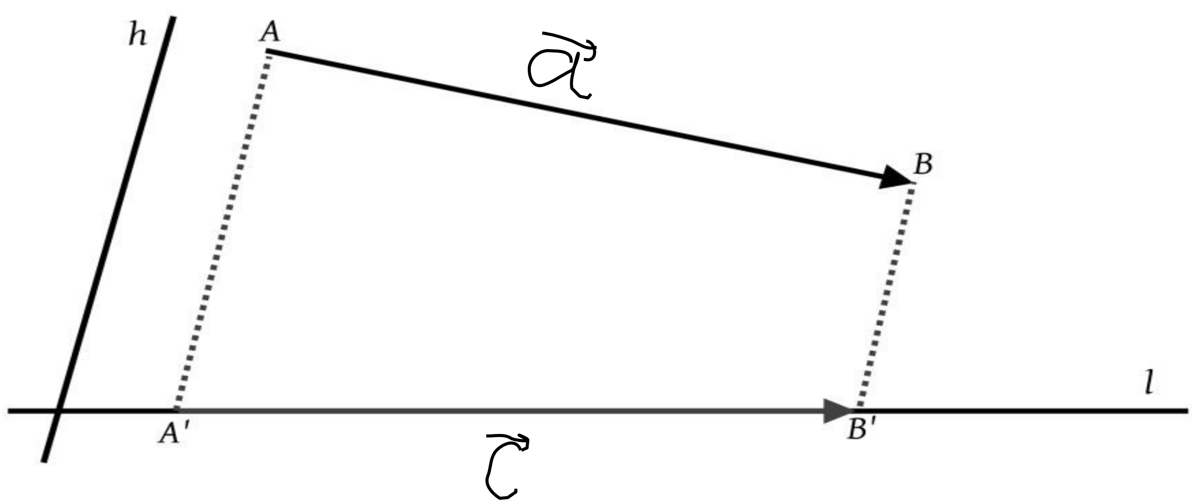



Рис. 4: Проекция вектора на прямую

**Вспом. определение 12.2. Проекцией точки** $P$ на прямую проекции $l$ параллельно направляющей $h$ называется точка $P'$, являющаяся пересечением прямой $l$ и прямой, проведенной из точки $P$ параллельно направляющей $h$. (см. Рисунок 5)

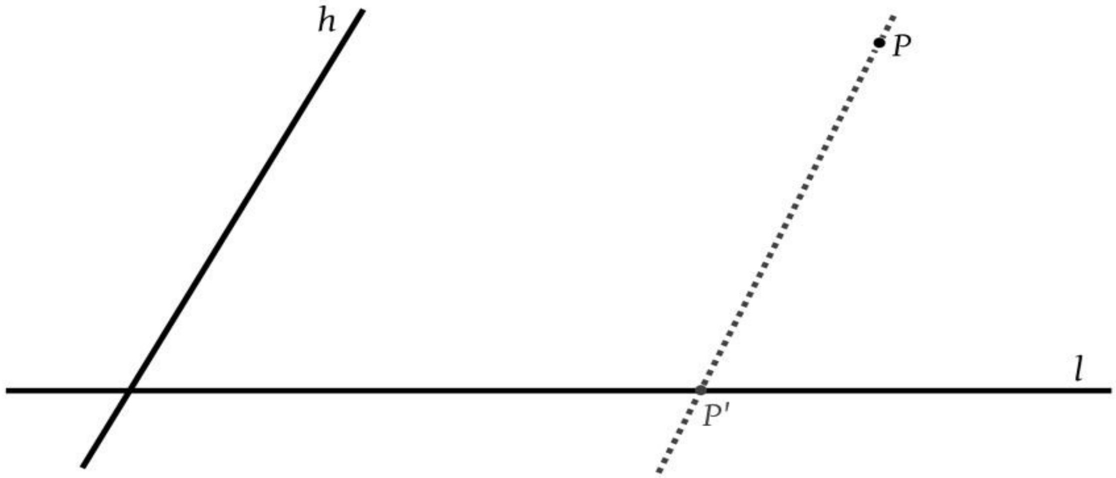



Рис. 5: Проекция точки на прямую

**Вспом. определение 12.3.** Проекция называется **ортогональной**, если прямая проекции и направляющая прямая (плоскость) взаимно перпендикулярны.

**Определение 12.1** (численное значение проекции вектора на вектор)**.** На плоскости **численным значением** проекции вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} \neq 0$ параллельно прямой $h$ называется число, обозначаемое $proj_{\vec{b}}\vec{a}(\| h)$ и определяемое равенством

$$proj_{\vec{b}}\vec{a}(\| h) = \frac{Proj_{\vec{b}}\vec{a}(\| h)}{\vec{b}}$$

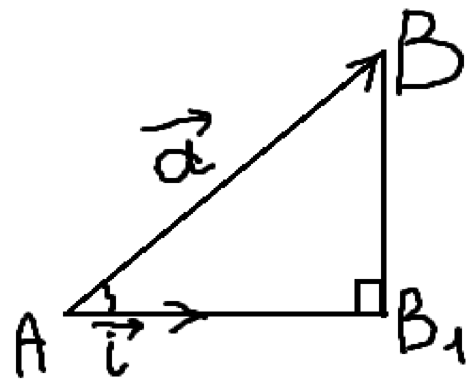
Аналогично определяется и обозначается численное значение проекции вектора на вектор в пространстве.

**Теорема.** (*численное значение ортогональной проекции*). Численное значение ортогональной проекции вектора на единичный вектор равно **произведению длины этого вектора** на **cos угла** между ними. Применяется следующая формула:

$$proj_{\vec{i}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\widehat{\vec{i}, \vec{a}})$$

*Доказательство.*

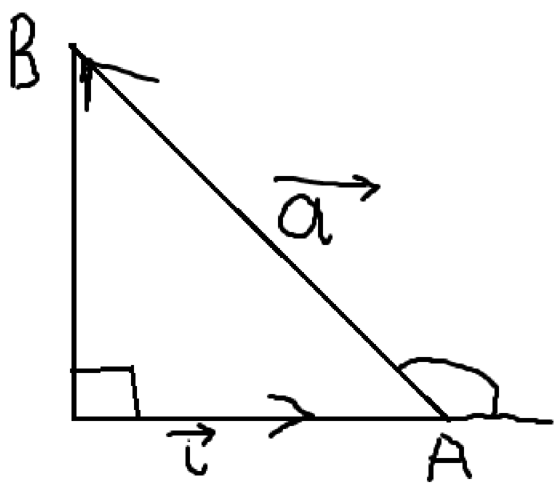
1) $\widehat{\vec{i}, \vec{a}} < 90°$




Пусть единичный вектор - $\vec{i}$ (по построению лежащий на $\overline{AB_1}$), проецируемый вектор - $\vec{a}$ (по построению лежащий на $\overline{AB}$), относительно направляющей $BB_1$. $\underline{Proj_{\vec{i}}\vec{a}}$ $\underline{AB_1}$

Очевидно, что $proj_{\vec{i}}\vec{a} = \vec{i} = \underbrace{\vec{i}}_{=1} = |\overline{AB_1}| = \underbrace{|\overline{AB}|}_{=\overline{a}}\cos(\widehat{\vec{i}, \vec{a}})$.

1) $\widehat{\vec{i}, \vec{a}} > 90°$




Имеем аналогичное условие, учитывая особенности построения, изображенного на рисунке. В силу того, что $\overline{AB_1} \uparrow\downarrow \overline{AB} \Rightarrow |\overline{AB_1}| = -\underbrace{|\overline{AB}|}_{=\overline{a}}\cos(\widehat{\vec{i}, \vec{a}})$

**Теорема**(*скалярное произведение в координатах*).Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ заданы в базисе ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$) или ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$).

Тогда $(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{ij} g_{ij}a_ib_j$. , где $g_{ij}$ – метрические параметры.

Если базис **ортонормирован**, то скалярное произведение равно $\sum_{i=1} a_ib_i$

В ортонормированном базисе $g_{ij} = 1$, если $i = j$, и $= 0$, если $i \neq j$.

*Доказательство.*

Пусть $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$, $\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2$. Тогда их скалярное произведение равно:

$(\vec{a}, \vec{b}) = (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2, b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2) = a_1b_1(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + a_1b_2(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + a_2b_1(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + a_2b_2(\vec{e}_2, \vec{e}_2)$, чтд.

Доказательство в ортонормированном базисе проводится аналогично. Формула сокращается, учитывая то, что в ортонормированном базисе $g_{ij} = 1$, если $i = j$, и $= 0$, если $i \neq j$.

## 12.3 Применение скалярного произведения в геометрии

**Пример 12.1** (угол между векторами). Пусть даны два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ориентированный угол между которыми равен $\varphi$. Из формулы скалярного произведения векторов

$$\varphi = \arccos \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

**Пример 12.2** (взаимное расположение луча и точки). Пусть дана точка $P$ и луч $AB$. Необходимо проверить принадлежность точки $P$ лучу $AB$. Точка $P$ будет принадлежать лучу $AB \Leftrightarrow |[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}]| = 0 \ \wedge \ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}) \geq 0$

**Пример 12.3** (взаимное расположение отрезка и точки). Пусть дана точка $P$ и отрезок $AB$. Необходимо проверить принадлежность точки $P$ отрезку $AB$. Точка $P$ будет принадлежать отрезку $AB \Leftrightarrow |[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}]| = 0 \ \wedge \ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}) \geq 0 \ \wedge \ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BP}) \geq 0$

# Вопрос № 11.

Отношение одинаковой ориентированности на множестве базисов плоскости/пространства геометрических векторов. Ориентированная плоскость и ориентированное простран-ство.

**Определение 13.1.** Пусть на плоскости или в пространстве даны два базиса $(\vec{a}_i)$ и $(\vec{b}_i)$. Первый из них называется **одинаково ориентированным со вторым**, если определитель, составленный из координат векторов первого базиса относительно второго, положителен.

$$(\vec{a}_i)Co(\vec{b}_i) \Leftrightarrow Det|a_i^k| > 0$$

Для случая плоскости:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2)Co(\vec{b}_1, \vec{b}_2) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} > 0$$

Для случая пространства:

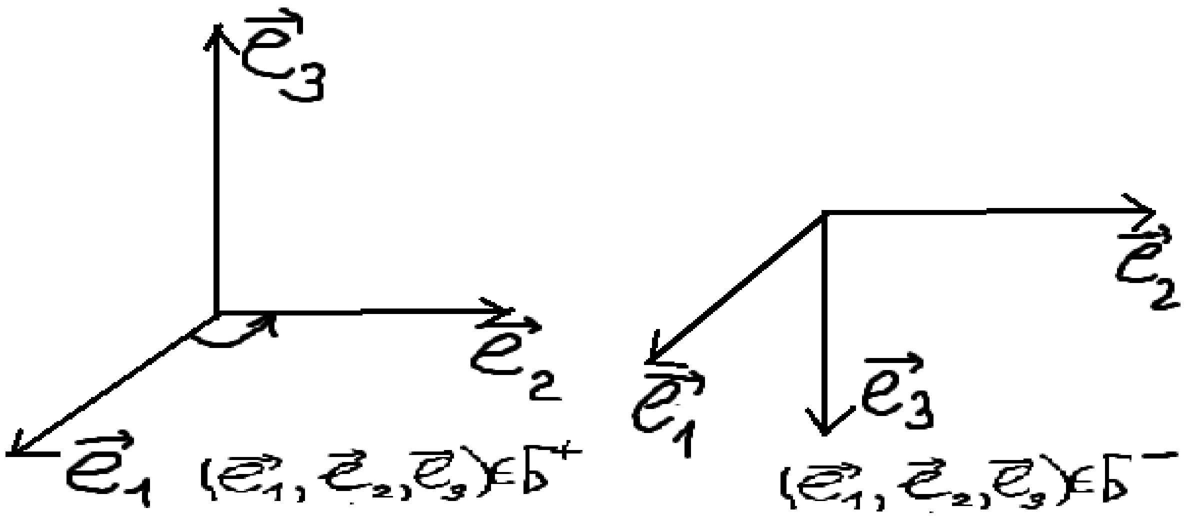
$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)Co(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} > 0$$

где $a_i^k$ — $k$-тая координата вектора $\vec{a}_i$.

**Определение 13.2** (неодинаковая ориентированность). Если $(\vec{a}_i)$ неодинаково ориентирован с базисом $(\vec{b}_i)$, то пишут

$$(\vec{a}_i)\neg Co(\vec{b}_i) \Leftrightarrow Det|a_i^k| < 0$$

**Вспом. определение 13.1. Ориентацией** плоскости и пространства называют класс отношения одинаковой ориентации на плоскости и в пространстве соответственно.




Изображение правого (Б+) и левого (Б-) базисов

Приведем некоторые свойства ориентации плоскости и пространства.

**Свойство 13.1.** Каждая ориентация плоскости и пространства есть непустое множество базисов плоскости и пространства соответственно.

**Свойство 13.2.** Два базиса, принадлежащие одной ориентации, одинаково ориентированы между собой и, обратно, любые два базиса, одинаково ориентированные между собой, принадлежат одной ориентации.

**Свойство 13.3.** Каждый базис плоскости или пространства принадлежит только одной ориентации. Каждая ориентация определяется заданием одного базиса, ей принадлежащего.

**Определение 13.3. Ориентированной плоскостью** и **ориентированным пространством** называется соответственно плоскость и пространство с выбранной ориентацией.

Эта ориентация называется **положительной**, противоположная ей называется **отрицательной**. Базисы, принадлежащие положительной и отрицательной ориентации, называются соответственно **положительными** и **отрицательными**.

**Теорема** (*транспонирование двух векторов базиса*). При **транспонировании** двух векторов базиса получается базис, п**ротивоположно ориентированный** с исходным.

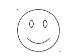
*Доказательство.*

Пусть ( $\vec{a}_i$) – некоторый базис на плоскости или в пространстве. Координаты векторов $\vec{a}_i$ относительно

базиса ( $\vec{a}_i$) имеют следующие значения:

Для случая плоскости $\vec{a}_1(1;0)$ и $\vec{a}_2(0;1)$; для случая пространства $\vec{a}_1(1;0;0)$, $\vec{a}_2(0;1;0)$, $\vec{a}_3(0;0;1)$.

Определитель $\Delta$ составленный из координат базисных векторов $a_i$ как в случае плоскости, так и в пространстве, равен 1. Произведем в базисе транспозицию двух векторов. Определитель $\Delta'$ составленный из координат векторов транспозированного базиса, будет отличаться от определителя $\Delta$ одной транспозицией двух строк. Следовательно, $\Delta' = -1$, что и доказывает теорему.



# Вопрос № 12.

Векторное произведение векторов. Свойства векторного произведения.

**Определение 14.1.** В ориентированном пространстве **векторным произведением** $[\vec{a}\vec{b}]$ двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется новый вектор, который удовлетворяет трем условиям:

1. длина его равна произведению длин перемножаемых векторов и синуса угла между ними:
$$|[\vec{a}\vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\widehat{\vec{a}\vec{b}}$$
2. векторное произведение перпендикулярно обоим сомножителям:
$$[\vec{a}\vec{b}] \perp \vec{a} \text{ и } [\vec{a}\vec{b}] \perp \vec{b}$$
3. базис $(\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}\vec{b}])$ положительный.

**Примечание 14.1.** Касаемо последнего условия из определения: нужно вспомнить правило правой руки.

## 14.1 Свойства векторного произведения

**Свойство 14.1.** Векторное произведение обращается в нуль $\Leftrightarrow$ сомножители коллинеарны.
$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}\vec{b}] = \vec{0}$$

**Свойство 14.2** (геометрический смысл длины)**.** Длина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на представлениях сомножителей с общим началом, как на сторонах.
$$|[\vec{a}\vec{b}]| = S_{\text{пар}}$$

**Свойство 14.3.** Векторное произведение антикоммутативно.
$$[\vec{a}\vec{b}] = -[\vec{b}\vec{a}]$$

*Доказательство.*

Заметим, что $|[\vec{a}\vec{b}]| = |[\vec{b}\vec{a}]|$. Исходя из условия векторного произведения, верно что

$[\vec{a}\vec{b}] \perp \vec{a}$, $[\vec{a}\vec{b}] \perp \vec{b}$

$[\vec{b}\vec{a}] \perp \vec{a}$, $[\vec{b}\vec{a}] \perp \vec{b}$.

Из всего вышесказанного делаем вывод, что $[\vec{a}\vec{b}] \parallel [\vec{b}\vec{a}]$. Значит либо $[\vec{a}\vec{b}] \uparrow\uparrow [\vec{b}\vec{a}]$, либо $[\vec{a}\vec{b}] \uparrow\downarrow [\vec{b}\vec{a}]$.

1) Рассмотрим первый случай. В таком случае $[\vec{a}\vec{b}] = [\vec{b}\vec{a}]$, из чего по условию векторного произведения делаем вывод, что $(\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}\vec{b}]) \in$Б+ и в то же время $(\vec{b}, \vec{a}, [\vec{b}\vec{a}]) \in$Б+. Однако мы видим одну транспозицию ($\vec{a}$ и $\vec{b}$ друг с другом), из чего по Теореме о транспозиции векторов мы знаем, что они обязаны быть противоположно ориентированы, но оба принадлежат Б+. Получили противоречие.

2) Следовательно, верен второй случай, когда вектора противоположно направлены. Теорема доказана.

☺

**Свойство 14.4.** $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda[\vec{a}\vec{b}] = [(\lambda\vec{a})\vec{b}] = [\vec{a}(\lambda\vec{b})]$

**Свойство 14.5.** Векторное произведение дистрибутивно относительно векторного сложения.

$$[(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}] = [\vec{a}\vec{c}] + [\vec{b}\vec{c}]$$

$$[\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})] = [\vec{a}\vec{b}] + [\vec{a}\vec{c}]$$

**Свойство 14.6.** Двойные векторные произведения выражаются равенствами

$$[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$$

$$[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}, \vec{c})$$

# Вопрос № 13.

Смешанное произведение векторов. Свойства смешанного произведения.

**Определение 15.1.** В ориентированном пространстве **смешанным произведением** $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ трех векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению двух векторов: векторного произведения первых двух сомножителей $[\vec{a}\vec{b}]$ и третьего вектора $\vec{c}$.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]\vec{c}$$

## 15.1 Свойства смешанного произведения

**Свойство 15.1.** Смешанное произведение обращается в нуль $\Leftrightarrow$ сомножители компланарны.

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0 \iff Cp(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

*Доказательство.*

=>

1) Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $Cp(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (так как из параллельности вытекает коллинеарность, а из нее по теореме линейная зависимость, что в свою очередь ведет к компланарности по Теореме о достаточном условии компланарности).

2) Если $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Из условия $([\vec{a}\,\vec{b}], \vec{c}) = 0 \iff \vec{a}\,\vec{b} \perp \vec{c}$. Из условия векторного произведения так же следует, что $\vec{a}\,\vec{b} \perp \vec{a}$ и $\vec{a}\,\vec{b} \perp \vec{b}$. Из полученной перпендикулярности делаем вывод, что $Cp(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

<=

Из $Cp(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ по Теореме о достаточном условии компланарности следует, что $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - линейно-зависимы. Тогда из ещё одной теоремы следует, что $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Тогда векторное произведение $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обращается в ноль, из чего и смешанное произведение обращается в ноль так же. Теорема доказана.