Ответы на вопросы экзамена по алгебре и геометрии

Евгений Мангасарян

31 января 2022

ver. 1.1.0 (31 мая 2022)

1 Вопрос

Бинарные отношения. Свойство однородных бинарных отношений.

Вспом. определение 1.1. $A \times B = (a, b),\ a \in A,\ b \in B$ — **прямое** или **декартово произведение**.

Определение 1.1. **Бинарным отношением** между элементами множеств A и B называется подмножество их декартового произведения.

$$\rho \subseteq A \times B$$

Определение 1.2. ρ является **однородным бинарным отношением**, если

$$A = B,\ \rho \subseteq A \times A = A^2$$

и обозначается буквой ρ.

$$a\rho b \Leftrightarrow (a, b) \in \rho$$

Свойство 1.1 (Свойства однородных бинарных отношений)**.** Отношение, заданное на множестве A, называется

1. **рефлексивным**, если $\forall a \in A\ (a, a) \in \rho$.
2. **симметричным**, если $\forall a, b \in A\ (a, b) \in \rho \Rightarrow (b, a) \in \rho$.
3. **транзитивным**, если $\forall a, b, c \in A\ (a, b) \in \rho \wedge (b, c) \in \rho \Rightarrow (a, c) \in \rho$.
4. **антирефлексивным**, если $\forall a \in A\ (a, a) \notin \rho$.
5. **антисимметричным**, если $\forall a, b \in A\ (a, b) \in \rho \wedge (b, a) \in \rho \Rightarrow a = b$.
6. **связным**, если $\forall a, b \in A\ (a, b) \in \rho \vee (b, a) \in \rho \vee a = b$.

2 Вопрос

Отношение эквивалентности. Свойство классов эквивалентности.

Определение 2.1. Если однородное бинарное отношение является **рефлексивным**, **симметричным** и **транзитивным**, то оно называется **отношением эквивалентности** и обозначается буквой R.

$$aRb \Leftrightarrow (a, b) \in R$$

Вспом. определение 2.1. Классом эквивалентности, соответствующим отношению эквивалентности R на множестве A, называется подмножество

$$R(a) = \{b \in A : \ (a, b) \in R\}$$

a называется образующим элементом.

Свойство 2.1. Свойство классов эквивалентности.

1. Каждый класс эквивалентности содержит хотя бы один элемент. $\exists(a, a) \in R(a)$.
2. Если $b \in R(a)$, то $R(b) = R(a)$.
3. Различные классы эквивалентности не пересекаются.
4. Объединение всех классов эквивалентности дает множество A.

3 Вопрос

Теорема о разбиении множества с заданным отношением эквивалентности. Основные примеры отношений эквивалентности (свободный вектор как класс эквивалентности отношения конгруэнтности на множестве связанных векторов евклидова пространства; вычет как класс эквивалентности отношения сравнимости по mod n на множестве целых чисел). Понятие согласованности алгебраической операции с отношением эквивалентности.

Теорема 3.1 (о разбиении множества с заданным отношением эквивалентности)**.** Любое отношение эквивалентности порождает на множестве разбиение на классы эквивалентности.

Доказательство. Пусть K_a — группа элементов из A, эквивалентных фиксированному элементу a. В силу **рефлексивности** $a \in K_a$. Покажем, что $\forall K_a \ \forall K_b$ или $K_a = K_b$, или не имеют общих элементов.

Пойдем от противного. Пусть

$$\exists c : \ c \in K_a \wedge c \in K_b,$$

т.е. $\exists c : \ c \sim a \wedge c \sim b$. В силу **транзитивности** $a \sim b$, а в силу **симметричности** $b \sim a$. Тогда $\forall x \in K_a \ (x \sim a) \Rightarrow x \in K_b \ (x \sim b)$. Таким образом, две группы, имеющие хотя бы один общий элемент, полностью совпадают, хотя предполагалось, что $K_a \neq K_b$. Было получено разбиение на классы. $\square$

Теорема 3.2 (обратная)**.** Любое разбиение множества на классы задает на этом множестве отношение эквивалентности.

Доказательство. Докажем обратную теорему. Пусть (B_i), где $i \in I$, — некоторое разбиение множества A. Рассмотрим отношение ρ такое, что

$$x \sim_\rho y \Leftrightarrow \exists i \in I \ (x \in B_i \wedge y \in B_i)$$

Введенное отношение **рефлексивно** и **симметрично**. Если $\forall x, y, z \ x \sim_\rho y \wedge y \sim_\rho z$, то в силу определения отношения ρ x, y, z принадлежат одному и тому же элементу разбиения B_i. Следовательно, $x \sim_\rho z$ и отношение ρ **транзитивно**.

Таким образом, ρ — отношение эквивалентности на A. □

Вспом. определение 3.1. Ненулевые связанные векторы **конгруэнтны**, если их длины и направления совпадают.

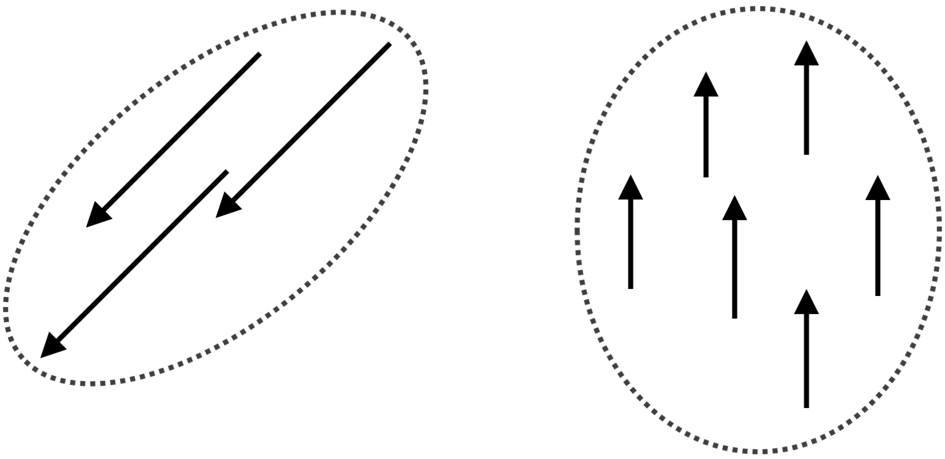


Рис. 1: Два свободных вектора.

Пример 3.1 (свободный вектор как класс эквивалентности отношения конгруэнтности на множестве связанных векторов)**.** Свободный вектор — это класс отношения конгруэнтности связанных векторов. (см. Рисунок 1)

Пример 3.2 (вычет как класс эквивалентности отношения сравнимости по mod n на множестве целых чисел)**.**

$$\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

или

$$\mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n\}$$

В данном случае классы эквивалентности называются **классами вычетов**.

Определение 3.1 (согласованность алгебраической операции с отношением эквивалентности)**.** Чтобы произвести операцию над классами, надо выбрать в них произвольных представителей, произвести над ними операцию и взять тот класс, в котором будет находиться получившийся элемент.

4 Вопрос

Определение группы. Абелевы группы (аддитивная, мультипликативная).

Определение 4.1. Группой называется замкнутое множество G с операцией умножения, обладающей следующими свойствами:

1. Ассоциативность. $\forall a, b, c \in G\ a(bc) = (ab)c$.
2. Существование единицы. $\forall a \in G\ ae = ea = a$.
3. Существование обратного элемента. $\forall a \in G\ a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Определение 4.2. Аддитивной абелевой группой называется множество A с операцией сложения, обладающей следующими свойствами:

1. Коммутативность. $\forall a, b \in A\ a + b = b + a$.
2. Ассоциативность. $\forall a, b, c \in A\ a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. Существование нуля. $\forall a \in A\ a + e = e + a = a$.
4. Существование обратного элемента. $\forall a \in A\ a + (-a) = (-a) + a = e$.

Определение 4.3. Мультипликативной абелевой группой называется множество B с операцией умножения, обладающей следующими свойствами:

1. Коммутативность. $\forall a, b \in B\ ab = ba$.
2. Ассоциативность. $\forall a, b, c \in A\ a(bc) = (ab)c$.
3. Существование единицы. $\forall a \in A\ ae = ea = a$.
4. Существование обратного элемента. $\forall a \in A\ a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

5 Вопрос

Основные примеры: числовые множества относительно операций умножения и сложения, группа свободных векторов по сложению, матричные группы (полная линейная группа, специальная линейная группа, ортогональная группа, специальная ортогональная группа).

Пример 5.1 (множество целых чисел относительно операции сложения)**.**

$$< \mathbb{Z}, + >$$

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$:

1. Выполняется замкнутость.
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. $a + 0 = 0 + a = a$.
4. $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Пример 5.2 (множество рациональных чисел без нуля относительно определенной операции умножения)**.**

$$< \mathbb{Q}^*, \circ >,\ \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\backslash\{0\},\ a \circ b = \frac{ab}{2}\ (\forall a, b \in \mathbb{Q}^*)$$

1. Выполняется замкнутость.
2. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.
3. $a \circ e = e \circ a = a,\ e = 2$.
4. $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e,\ a^{-1} = \frac{4}{a}$.

Пример 5.3 (группа свободных векторов по сложению)**.**

$$< V, + >,$$

V — множество свободных векторов, $+$ — операция сложения свободных векторов. Проверим

1. Замкнутость: $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.
2. Ассоциативность: $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2) = (b_1, b_2) + (a_1, a_2)$.
3. Существование нуля: $(a_1, a_2) + (0, 0) = (0, 0) + (a_1, a_2) = (a_1, a_2)$.
4. Существование обратного: $(a_1, a_2) + (-a_1, -a_2) = (-a_1, -a_2) + (a_1, a_2) = (0, 0)$.

Определение 5.1. Полная (общая) **линейная группа** состоит из всех $n \times n$ обратимых матриц.

$$GL(n, \mathbb{R}) = GL(n) = \{X \in M(n) :\ \det X \neq 0\}$$

Определение 5.2. Специальная линейная группа состоит из $n \times n$ матриц с единичным определителем.

$$SL(n, \mathbb{R}) = SL(n) = \{X \in M(n) :\ \det X = 1\}$$

Геометрически такие матрицы соответствуют линейным операторам $v \mapsto X_v$, сохраняющим стандартный объем и ориентацию в $\mathbb{R}^n$.

Определение 5.3. Ортогональная группа образована $n \times n$ ортогональными матрицами.

$$O(n) = \{X \in M(n) :\ XX^T = Id\}$$

Id — единичная матрица, X^T — транспонированная матрица X.

Ортогональные преобразования $v \mapsto X_v$ сохраняют евклидову структуру в $\mathbb{R}^n$. В силу того, что $1 = \det(XX^T) = \det^2 X$, ортогональные матрицы имеют определитель $\det X = \pm 1$.

Определение 5.4. Специальная ортогональная группа состоит из ортогональных матриц $n \times n$, определитель которых равен 1.

$$SO(n) = \{X \in M(n) :\ XX^T = Id, \det X = 1\}$$

Специальные ортогональные преобразования $v \mapsto X_v$ сохраняют как евклидову структуру, так и ориентацию в $\mathbb{R}^n$.

6 Вопрос

Линейно зависимые и линейно независимые векторы (определение, свойства).

Определение 6.1. Выражение вида $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n$ называется **линейной комбинацией** векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$ и чисел $\lambda_i \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}$.

Определение 6.2. Векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ называются **линейно зависимыми**, если $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n = 0$ и $\exists i:\ \lambda_i \neq 0$.

Если $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n = 0$ при $\forall i \in \mathbb{N}\ \lambda_i = 0$, то $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ называются **линейно независимыми**.

Свойство 6.1 (линейно зависимых векторов)**.** Векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ линейно зависимы $\Leftrightarrow$ хотя бы один из них линейно выражается через остальные.

Доказательство.
$\Rightarrow$. По определению линейной зависимости $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n = 0$. Пусть $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow$

$$\lambda_1\vec{a}_1 = -\lambda_2\vec{a}_2 - \dots - \lambda_n\vec{a}_n$$
$$\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a}_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\vec{a}_n$$

То есть $\vec{a}_1$ линейно выражается через $\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.
$\Leftarrow$.

$$\vec{a}_1 = \mu_2\vec{a}_2 + \dots + \mu_n\vec{a}_n$$
$$-\vec{a}_1 + \mu_2\vec{a}_2 + \dots + \mu_n\vec{a}_n = 0$$

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ линейно зависимы по определению. □

Свойство 6.2 (связь линейно зависимых и линейно независимых)**.** Пусть векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ линейно независимы. Вектор $\vec{b}$ линейно выражается через $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \Leftrightarrow \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}$ — линейно зависимы.

Свойство 6.3 (единственность выражения вектора через линейно независимые векторы)**.** Пусть $\vec{b}$ линейно выражается через $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$. Это выражение единственно $\Leftrightarrow \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ — линейно независимы.

7 Вопрос

Признаки коллинеарности и компланарности геометрических векторов.

Вспом. определение 7.1. Свободные векторы для краткости называют просто «векторами».

Вспом. определение 7.2. Два или большее число векторов называются **коллинеарными**, если их представители с общим началом лежат на одной прямой.

$$\vec{a} \parallel \vec{b}$$

Вспом. определение 7.3. Три или большее число векторов называются **компланарными**, если их представители с общим началом лежат в одной плоскости.

$$Cp(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

Свойство 7.1 (признак коллинеарности векторов). Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны $\Leftrightarrow$ они линейно зависимы.

$$\vec{b} \neq \vec{0},\ \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}\ \vec{a} = \lambda \vec{b}$$

Свойство 7.2 (признак компланарности векторов). Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow$ они линейно зависимы.

$$\vec{b} \neq \vec{0},\ \vec{c} \neq \vec{0},\ Cp(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ \vec{a} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}$$

8 Вопрос

Разложение вектора на плоскости и в пространстве. Базис на плоскости, в пространстве. Координаты, действия с векторами в координатах.

Вспом. определение 8.1. Векторным (линейным) пространством над полем K называется множество V с операциями сложения и умножения на элемент поля K, обладающая следующими свойствами:

1. V — аддитивная абелева группа.
2. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b,\ \lambda \in K,\ a, b \in V.$
3. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a,\ \lambda, \mu \in K,\ a \in V.$
4. $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a.$
5. $1 \cdot a = a.$

Пример 8.1 (векторного пространства над полем). Множество матриц размера $m \times n$ с операцией матричного сложения и умножения матриц на число образует векторное пространоство над полем $\mathbb{R}$.

Теорема 8.1 (о разложении вектора на плоскости). Если векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ неколлинеарны, то всякий компланарный с ними вектор $\vec{a}$ можно разложить по векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ единственным образом.

Доказательство. В случае, когда $\vec{a} \parallel \vec{e}_1$, по свойству коллинеарных векторов $\exists \lambda \in \mathbb{R}\ \vec{a} = \lambda \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2$.

Пусть теперь $\vec{a} \nparallel \vec{e}_1,\ \vec{a} \nparallel \vec{e}_2$. Рассмотрим представителей $\vec{a}$, $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, выходящих из одной точки O. Тогда $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$. Построим параллелограмм $OBAC$ с диагональю на $\overrightarrow{OA}$. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. То есть $\overrightarrow{OB} \parallel \overrightarrow{OE_1}$ и $\overrightarrow{OC} \parallel \overrightarrow{OE_2} \Rightarrow$

$$\overrightarrow{OA} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{OE_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{OE_2} \Rightarrow \vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Докажем единственность данного разложения. Пойдем от противного. Пусть $\exists \lambda_1' \neq \lambda_1,\ \exists \lambda_2' \neq \lambda_2 :\ \vec{a} = \lambda_1' \vec{e}_1 + \lambda_2' \vec{e}_2$. Получается, что

$$\vec{a} - \vec{a} = \lambda_1' \vec{e}_1 - \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2' \vec{e}_2 - \lambda_2 \vec{e}_2$$
$$\vec{0} = \vec{e}_1(\lambda_1' - \lambda_1) + \vec{e}_2(\lambda_2' - \lambda_2)$$

$\vec{e}_1 \neq 0,\ \vec{e}_2 \neq 0$ и $\vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2 \Rightarrow \vec{e}_1 \neq \vec{e}_2$. Значит,

$$\begin{cases} (\lambda_1' - \lambda_1) = 0 \\ (\lambda_2' - \lambda_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1' = \lambda_1 \\ \lambda_2' = \lambda_2 \end{cases},$$

что противоречит нашему предположению. Поэтому такое разложение единственно. □

Теорема 8.2 (разложение вектора в пространстве)**.** Всякий вектор $\vec{a}$ пространства можно разложить по трем некомпланарным векторам.

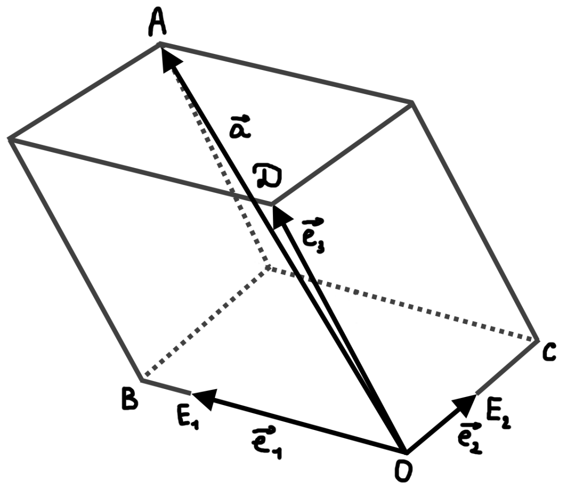


Рис. 2: Разложение вектора в пространстве

Доказательство. Пусть даны три вектора $\vec{e}_1 \neq \vec{0},\ \vec{e}_2 \neq \vec{0},\ \vec{e}_3 \neq \vec{0}$ такие, что $\neg Cp(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$, и $\vec{a} \neq 0$ — произвольный вектор пространства.

Рассмотрим случай, когда $Cp(\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Тогда по теореме о разложении вектора на плоскости $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\ \vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3$.

Пусть теперь $\vec{a}$ некомпланарен ни с какой парой векторов $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$. Выберем точку O пространства и рассмотрим представителей векторов $\vec{a},\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$, выходящих из нее:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1,\ \overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2,\ \overrightarrow{OE_3} = \vec{e}_3.$$

Рассмотрим параллелепипед, построенный на данных векторах (см. Рисунок 2). Тогда

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}.$$

По построению $\overrightarrow{OB} \parallel \overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OC} \parallel \overrightarrow{OE_2}$, $\overrightarrow{OD} \parallel \overrightarrow{OE_3} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \parallel \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OC} \parallel \vec{e}_2$, $\overrightarrow{OD} \parallel \vec{e}_3 \Rightarrow$

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\ \vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3.$$

Докажем единственность разложения. Пусть существуют два различных разложения вектора $\vec{a}$

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3;\ \vec{a} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3.$$

Тогда

$$a_1 - b_1 \neq 0 \vee a_2 - b_2 \neq 0 \vee a_3 - b_3 \neq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a_1 - b_1)\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\vec{e}_2 + (a_3 - b_3)\vec{e}_3 = 0 \Rightarrow$$

векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ линейно зависимы $\Rightarrow$ компланарны, что противоречит условию теоремы. Значит, разложение единственно. □

Определение 8.1. Система векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\} \subset V$ называется **базисом** векторного пространства V, если $\forall \vec{a} \in V$ единственным образом линейно выражается через $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Коэффициенты этого выражения называют **координатами** вектора $\vec{a}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$.

9 Вопрос

Признаки коллинеарности и компланарности векторов в координатах.

Теорема 9.1 (признак коллинеарности векторов в координатах)**.** Пусть $\vec{a}(a^1, a^2),\ \vec{b}(b^1, b^2),\ \vec{b} \neq \vec{0}$. Тогда

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a^1}{a^2} = \frac{b^1}{b^2}$$

Отсюда

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} = 0$$

Доказательство.
$\Rightarrow$. Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Из правила умножения вектора на число следует, что $a^1 = \lambda b^1,\ a^2 = \lambda b^2$. То есть $\lambda = \frac{a^1}{b^1} = \frac{a^2}{b^2}$.
$\Leftarrow$. Нетрудно доказать достаточность, если предположить, что $\frac{a^1}{a^2} = \frac{b^1}{b^2} = \lambda$. □

Справедливо аналогичное утверждение относительно компланарных векторов:

Теорема 9.2 (признак компланарности векторов в координатах)**.** Пусть $\vec{a}(a^1, a^2, a^3),\ \vec{b}(b^1, b^2, b^3),\ \vec{c}(c^1, c^2, c^3),\ \vec{b} \neq \vec{0},\ \vec{c} \neq \vec{0}$. Тогда

$$Cp(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 0$$

10 Вопрос

Радиус-вектор точки. Деление отрезка в данном отношении.

Определение 10.1. Назовем фиксированную точку O **началом** или **полюсом**. **Радиус-вектором** $\vec{r}_A$ точки A называется вектор $\overrightarrow{OA}$, определяемый точками O и A.

$$\vec{r}_A \text{ является радиус-вектором точки } A \Leftrightarrow A(\vec{r}_A)$$

Свойство 10.1. Каждый вектор $\overrightarrow{AB}$ равен разности радиус-векторов точек B и A.

Теорема 10.1 (деление отрезка в данном отношении)**.** Если даны две точки $A(\vec{r}_A)$ и $B(\vec{r}_B)$, то точка C делит отрезок AB в отношении λ, то есть

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \lambda \Leftrightarrow \vec{r}_C = \frac{\vec{r}_A + \lambda \vec{r}_B}{1 + \lambda}$$

В частности, если M — середина отрезка AB, то

$$\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2}$$

11 Вопрос

Скалярное произведение векторов и его свойства.

Определение 11.1. Скалярным произведением $(\vec{a}, \vec{b})$ двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин перемножаемых векторов и косинуса угла между ними.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \widehat{\vec{a}\vec{b}}$$

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, то полагают, что $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

11.1 Геометрические свойства скалярного произведения

Свойство 11.1. Скалярное произведение обращается в нуль $\Leftrightarrow$ сомножители взаимно перпендикулярны.

Свойство 11.2. Скалярное произведение положительно, если угол между сомножителями острый, и отрицательно, если угол тупой.

Свойство 11.3. Скалярное произведение ненулевых векторов равно длине одного из сомножителей, умноженной на численное значение ортогональной проекции другого сомножителя на орт первого сомножителя (см. Рисунок 3).

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| proj_{\vec{a}^\circ} \vec{b} = |\vec{b}| proj_{\vec{b}^\circ} \vec{a}$$

Численное значение ортогональной проекции вектора $\vec{a}$ на единичный вектор $\vec{i}$ совпадает со скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{i}$.

$$proj_{\vec{i}} \vec{a} = (\vec{a}, \vec{i})$$

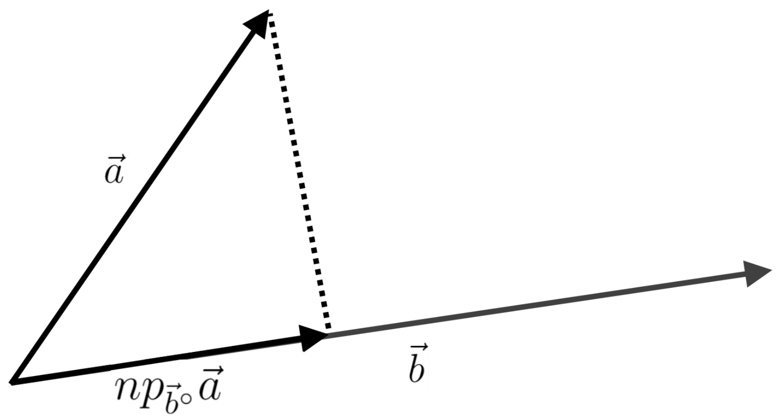


Рис. 3: Свойство скалярного произведения векторов

Свойство 11.4. Скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{a})$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$.

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Свойство 11.5. Косинус угла между двумя ненулевыми векторами равняется скалярному произведению данных векторов, деленному на произведение их длин.

$$\cos \widehat{\vec{a}\vec{b}} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\sqrt{\vec{a}^2}\sqrt{\vec{b}^2}}$$

11.2 Формальные свойства скалярного произведения

Свойство 11.6. Скалярное произведение коммутативно.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$$

Свойство 11.7.

$$\lambda(\vec{a}, \vec{b}) = (\lambda\vec{a}, \vec{b})$$

Свойство 11.8. Скалярное произведение дистрибутивно относительно операции векторного сложения.

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$$

12 Вопрос

Численное значение проекции вектора на вектор. Выражение скалярного произведения в координатах. Применение скалярного произведения в геометрии.

12.1 Численное значение проекции вектора на вектор

Вспом. определение 12.1. На плоскости **проекцией вектора** $\vec{a}$ на прямую проекции l или на вектор $\vec{b} \neq \vec{0}$ параллельно направляющей прямой $h \neq l$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий двум условиям (см. Рисунок 4):

1. $\vec{c} \parallel l$ или, соответственно, $\vec{c} \parallel \vec{b}$ и
2. $\vec{a} - \vec{c} \parallel h$.

Этот вектор обозначается символами

$$Proj_l\vec{a}(\parallel h) \text{ или } Proj_{\vec{b}}\vec{a}(\parallel h)$$

Вспом. определение 12.2. Проекцией точки P на прямую проекции l параллельно направляющей h называется точка P', являющаяся пересечением прямой l и прямой, проведенной из точки P параллельно направляющей h. (см. Рисунок 5)

Вспом. определение 12.3. Проекция называется **ортогональной**, если прямая проекции и направляющая прямая (плоскость) взаимно перпендикулярны.

Определение 12.1 (численное значение проекции вектора на вектор)**.** На плоскости **численным значением** проекции вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} \neq 0$ параллельно прямой h называется число, обозначаемое $proj_{\vec{b}}\vec{a}(\parallel h)$ и определяемое равенством

$$proj_{\vec{b}}\vec{a}(\parallel h) = \frac{Proj_{\vec{b}}\vec{a}(\parallel h)}{\vec{b}}$$

Аналогично определяется и обозначается численное значение проекции вектора на вектор в пространстве.

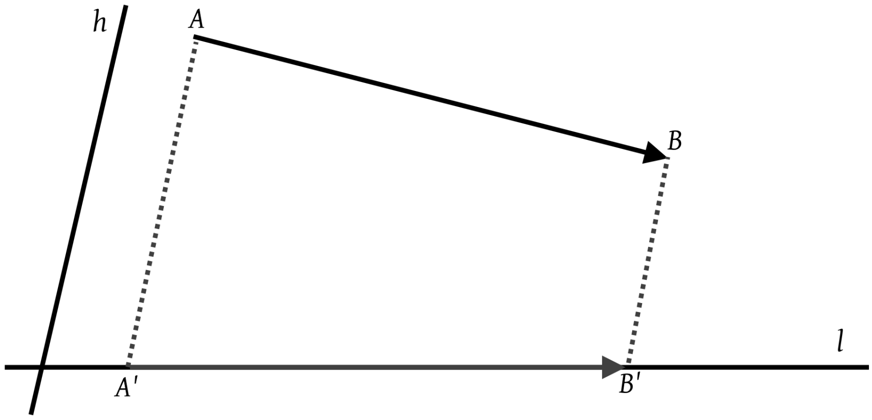


Рис. 4: Проекция вектора на прямую

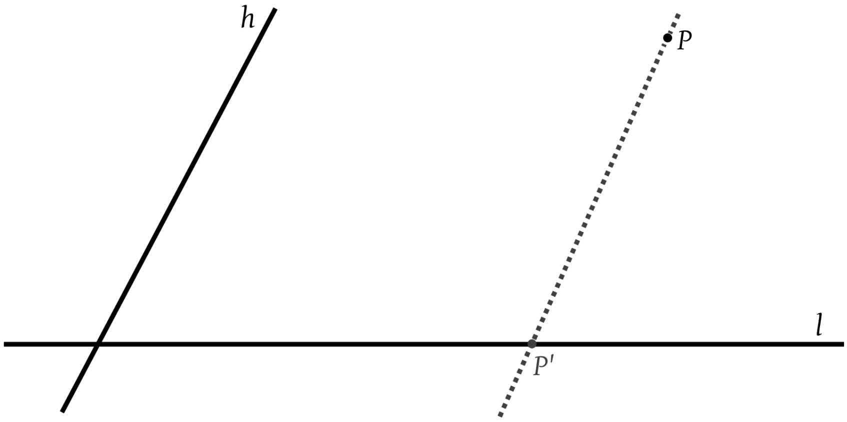


Рис. 5: Проекция точки на прямую

12.2 Выражение скалярного произведения в координатах

Определение 12.2 (скалярное произведение в координатах на плоскости)**. Скалярное произведение векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на плоскости, заданных своими координатами относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2):\ \vec{a}(a^1, a^2),\ \vec{b}(b^1, b^2)$ выражается формулой

$$(\vec{a}, \vec{b}) = g_{11}a^1b^1 + g_{12}(a^1b^2 + a^2b^1) + g_{22}a^2b^2$$

в частности

$$\vec{a}^2 = g_{11}(a^1)^2 + 2g_{12}a^1a^2 + g_{22}(a^2)^2$$

где g_{11}, g_{12}, g_{22} — так называемые **метрические параметры базиса** $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, определяемые равенствами

$$g_{11} = \vec{e}_1^{\,2}$$
$$g_{12} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$
$$g_{22} = \vec{e}_2^{\,2}$$

Для ортонормированного базиса $g_{11} = g_{22} = 1,\ g_{12} = 0$. Значит,

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_xb_x + a_yb_y$$
$$\vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2$$

Определение 12.3 (скалярное произведение в координатах в пространстве)**. Скалярное произведение векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пространства, заданных своими координатами относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: $\vec{a}(a^1, a^2, a^3)$, $\vec{b}(b^1, b^2, b^3)$ выражается формулой

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} a^i b^j$$

где g_{ij} — метрические параметры базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, определяемые равенствами $g_{ij} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

Для ортонормированного базиса

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$
$$\vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

Определение 12.4. Ортонормированные координаты вектора совпадают со скалярными произведениями этого вектора на соответствующие базисные векторы

1. в плоскости: $a_x = (\vec{a}, \vec{i})$, $a_y = (\vec{a}, \vec{j})$,
2. в пространстве: $a_x = (\vec{a}, \vec{i})$, $a_y = (\vec{a}, \vec{j})$, $a_z = (\vec{a}, \vec{k})$.

12.3 Применение скалярного произведения в геометрии

Пример 12.1 (угол между векторами)**.** Пусть даны два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ориентированный угол между которыми равен φ. Из формулы скалярного произведения векторов

$$\varphi = \arccos \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Пример 12.2 (взаимное расположение луча и точки)**.** Пусть дана точка P и луч AB. Необходимо проверить принадлежность точки P лучу AB. Точка P будет принадлежать лучу $AB \Leftrightarrow |[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}]| = 0 \ \wedge \ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}) \geq 0$

Пример 12.3 (взаимное расположение отрезка и точки)**.** Пусть дана точка P и отрезок AB. Необходимо проверить принадлежность точки P отрезку AB. Точка P будет принадлежать отрезку $AB \Leftrightarrow |[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}]| = 0 \ \wedge \ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}) \geq 0 \ \wedge \ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BP}) \geq 0$

13 Вопрос

Отношение одинаковой ориентированности на множестве базисов плоскости/пространства геометрических векторов. Ориентированная плоскость и ориентированное пространство.

Определение 13.1. Пусть на плоскости или в пространстве даны два базиса $(\vec{a}_i)$ и $(\vec{b}_i)$. Первый из них называется **одинаково ориентированным со вторым**, если определитель, составленный из координат векторов первого базиса относительно второго, положителен.

$$(\vec{a}_i) Co (\vec{b}_i) \Leftrightarrow Det|a_i^k| > 0$$

Для случая плоскости:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2) Co (\vec{b}_1, \vec{b}_2) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} > 0$$

Для случая пространства:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) Co(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} > 0$$

где a_i^k — k-тая координата вектора $\vec{a}_i$.

Определение 13.2 (неодинаковая ориентированность)**.** Если $(\vec{a}_i)$ неодинаково ориентирован с базисом $(\vec{b}_i)$, то пишут

$$(\vec{a}_i) \neg Co(\vec{b}_i) \Leftrightarrow Det|a_i^k| < 0$$

Вспом. определение 13.1. Ориентацией плоскости и пространства называют класс отношения одинаковой ориентации на плоскости и в пространстве соответственно.

Приведем некоторые свойства ориентации плоскости и пространства.

Свойство 13.1. Каждая ориентация плоскости и пространства есть непустое множество базисов плоскости и пространства соответственно.

Свойство 13.2. Два базиса, принадлежащие одной ориентации, одинаково ориентированы между собой и, обратно, любые два базиса, одинаково ориентированные между собой, принадлежат одной ориентации.

Свойство 13.3. Каждый базис плоскости или пространства принадлежит только одной ориентации. Каждая ориентация определяется заданием одного базиса, ей принадлежащего.

Определение 13.3. Ориентированной плоскостью и **ориентированным пространством** называется соответственно плоскость и пространство с выбранной ориентацией.

Эта ориентация называется **положительной**, противоположная ей называется **отрицательной**. Базисы, принадлежащие положительной и отрицательной ориентации, называются соответственно **положительными** и **отрицательными**.

14 Вопрос

Векторное произведение векторов. Свойства векторного произведения.

Определение 14.1. В ориентированном пространстве **векторным произведением** $[\vec{a}\vec{b}]$ двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется новый вектор, который удовлетворяет трем условиям:

1. длина его равна произведению длин перемножаемых векторов и синуса угла между ними:
$$|[\vec{a}\vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \widehat{\vec{a}\vec{b}}$$
2. векторное произведение перпендикулярно обоим сомножителям:
$$[\vec{a}\vec{b}] \perp \vec{a} \text{ и } [\vec{a}\vec{b}] \perp \vec{b}$$
3. базис $(\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}\vec{b}])$ положительный.

Примечание 14.1. Касаемо последнего условия из определения: нужно вспомнить правило правой руки.

14.1 Свойства векторного произведения

Свойство 14.1. Векторное произведение обращается в нуль $\Leftrightarrow$ сомножители коллинеарны.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}\vec{b}] = \vec{0}$$

Свойство 14.2 (геометрический смысл длины)**.** Длина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на представлениях сомножителей с общим началом, как на сторонах.

$$|[\vec{a}\vec{b}]| = S_{\text{пар}}$$

Свойство 14.3. Векторное произведение антикоммутативно.

$$[\vec{a}\vec{b}] = -[\vec{b}\vec{a}]$$

Свойство 14.4. $\lambda \in \mathbb{R}\ \lambda[\vec{a}\vec{b}] = [(\lambda\vec{a})\vec{b}] = [\vec{a}(\lambda\vec{b})]$

Свойство 14.5. Векторное произведение дистрибутивно относительно векторного сложения.

$$[(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}] = [\vec{a}\vec{c}] + [\vec{b}\vec{c}]$$
$$[\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})] = [\vec{a}\vec{b}] + [\vec{a}\vec{c}]$$

Свойство 14.6. Двойные векторные произведения выражаются равенствами

$$[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\vec{b})$$

$$[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}] = \vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b},\vec{c})$$

15 Вопрос

Смешанное произведение векторов. Свойства смешанного произведения.

Определение 15.1. В ориентированном пространстве **смешанным произведением** $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ трех векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению двух векторов: векторного произведения первых двух сомножителей $[\vec{a}\vec{b}]$ и третьего вектора $\vec{c}$.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]\vec{c}$$

15.1 Свойства смешанного произведения

Свойство 15.1. Смешанное произведение обращается в нуль $\Leftrightarrow$ сомножители компланарны.

Свойство 15.2 (геометрический смысл знака смешанного произведения)**.** Смешанное произведение положительно (отрицательно) $\Leftrightarrow$ сомножители образуют положительный (отрицательный) базис, то есть $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$ равносильно тому, что базис $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ положительный и $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$ тому, что $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ отрицательный.

Свойство 15.3 (геометрический смысл модуля смешанного произведения)**.** Абсолютная величина смешанного произведения некомпланарных векторов равна объему параллелепипеда, построенного на представителях сомножителей с общим началом, как на ребрах.

$$|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = V_{\text{пар}}$$

Объем тетраэдра, ребрами которого, выходящими из его общей вершины, служат представители векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$$

Свойство 15.4. Смешанное произведение не изменяется при циклической перестановке сомножителей.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$$

Смешанное произведение меняет знак при перестановке двух сомножителей.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$$

Свойство 15.5. $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(\lambda\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(\lambda\vec{c})$

Свойство 15.6. Смешанное произведение дистрибутивно.

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c}$$
$$\vec{a}(\vec{b}_1 + \vec{b}_2)\vec{c} = \vec{a}\vec{b}_1\vec{c} + \vec{a}\vec{b}_2\vec{c}$$
$$\vec{a}\vec{b}(\vec{c}_1 + \vec{c}_2) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}_1 + \vec{a}\vec{b}\vec{c}_2$$

16 Вопрос

Определения кольца, поля, подкольца и подполя. Кольцо вычетов по модулю n.

16.1 Определения кольца, поля, подкольца и подполя

Определение 16.1. Кольцо — множество K с операциями сложения и умножения, обладающими следующими свойствами:

1. K относительно сложения — абелева группа.

2. Дистрибутивность умножения относительно сложения. $\forall a, b, c \in K$ $a(b+c) = ab + ac$.

Вспом. определение 16.1. Кольцо **ассоциативно**, если $\forall a, b, c \in K$ $(ab)c = a(bc)$.

Вспом. определение 16.2. Кольцо **коммутативно**, если $\forall a, b \in K$ $ab = ba$.

Вспом. определение 16.3. Кольцо считается **с единицей**, если $\forall a \in K$ $ae = ea = a$.

Вспом. определение 16.4. Каждый элемент кольца считается **обратимым**, если $\forall a \in K$ $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Определение 16.2. Полем называется **коммутативное**, **ассоциативное** кольцо **с единицей**, в котором каждый ненулевой элемент **обратим**.

Вспом. определение 16.5. Подмножество H группы G называется **подгруппой** группы G, если

1. $\exists a, b \in H \Rightarrow \exists ab \in H$.

2. В подмножестве H есть единичный элемент. $\exists e \in H$.

3. Для каждого ненулевого a найдется обратный элемент $\exists a \in H,\ a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \in H$.

(см. Рисунок 6)

Определение 16.3. Подмножество L кольца K называется **подкольцом**, если

1. L является подгруппой аддитивной абелевой группы кольца K.

2. L замкнуто относительно умножения.

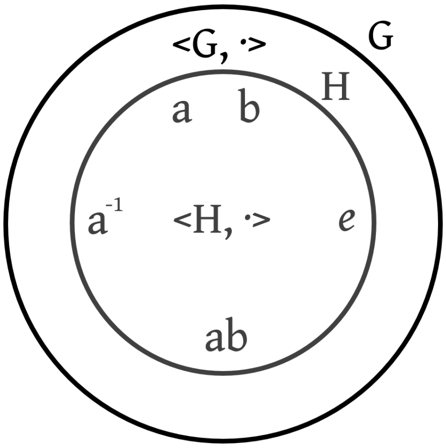


Рис. 6: Подгруппа H группы G

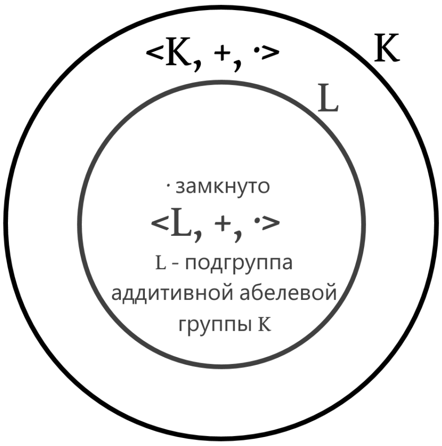


Рис. 7: Подкольцо L кольца K

Очевидно, что всякое подкольцо само является кольцом относительно тех же операций. При этом оно наследует такие свойства, как коммутативность и ассоциативность. (см. Рисунок 7)

Определение 16.4. Подмножество L поля K называется **подполем**, если

1. L является подкольцом кольца K.
2. Для каждого ненулевого a найдется обратный элемент $\exists a \in L,\ a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \in L$.
3. В подмножестве L есть единичный элемент. $\exists e \in L$.

(см. Рисунок 8)

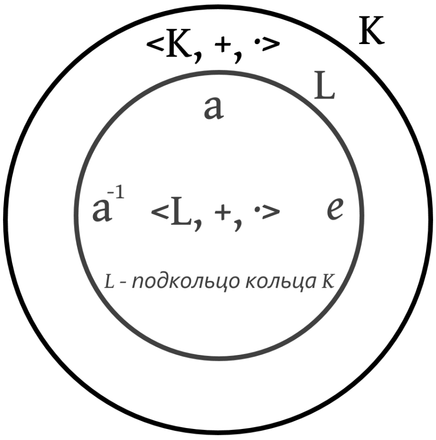


Рис. 8: Подполе L поля K

16.2 Кольцо вычетов по модулю n

Вспом. определение 16.6. Пусть n — фиксированное натуральное число. Рассмотрим в множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел следующее **отношение сравнимости по модулю n**: $a \equiv b\ (mod\ n)$ (a и b дают одинаковые остатки при делении на n).

Очевидно, что это отношение эквивалентности (см. Определение 2.1), причем классы эквивалентности могут быть занумерованы числами $0, 1, n-1$ таким образом, что r-й класс состоит из всех целых чисел, дающих при делении на n остаток r.

Определение 16.5. Класс эквивалентности, содержащий целое число a, называется **вычетом числа a по модулю n** и обозначается через $[a]_n$ (реже — $[a]$, если понятно, о каком n идет речь).

Фактормножество множества $\mathbb{Z}$ по сравнимости по модулю n обозначается через $\mathbb{Z}_n$. Можно написать, что

$$\mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}$$

Каждый элемент множества можно обозначать по разному. Например, элемент $[1]_n$ может быть обозначен через $[2n+1]_n$ или $[-(n-1)]_n$.

Определение 16.6 (операций сложения и умножения во множестве вычетов по модулю n)**.** Операции умножения и сложения в $\mathbb{Z}_n$ согласованы с операциями сложения и умножения в $\mathbb{Z}$. Пусть $a \equiv a'\ (mod\ n)$, $b \equiv b'\ (mod\ n)$. Тогда

$$a + b \equiv a' + b \equiv a' + b'\ (mod\ n)$$

и, аналогично,

$$ab \equiv a'b \equiv a'b'\ (mod\ n)$$

Таким образом, можно определить в множестве $\mathbb{Z}_n$ $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ операции сложения и умножения по формулам

$$[a]_n + [b]_n = [a+b]_n$$
$$[a]_n[b]_n = [ab]_n$$

Определение 16.7 (кольца вычета по модулю n)**.** $\mathbb{Z}_n$ с определенными выше операциями сложения и умножения является **коммутативным**, **ассоциативным** кольцом **с единицей** и называется **кольцом вычетов по модулю n**.

17 Вопрос

Условия, при которых кольцо вычетов является полем.

Теорема 17.1. Кольцо $\mathbb{Z}_n$ является **полем** $\Leftrightarrow$ n — простое число.

Доказательство.
$\Rightarrow$. От противного. Пусть $\mathbb{Z}_n$ — поле, n — составное число, $n = kl$, $k > 1$, $l > 1$. По определению операции умножения в кольце вычетов $[k]_n \cdot [l]_n = [kl]_n = [n]_n = 0$. Тогда в $\mathbb{Z}_n$ имеются делители нуля $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}_n$ — не поле.
$\Leftarrow$. Пусть n — простое. Рассмотрим $[a]_n \neq 0$. Найдем ему обратный элемент, умножая на все элементы кольца. Получим: $[0]_n$, $[a]_n$, $[2a]_n$, $\ldots$, $[(n-1)a]_n$. Докажем, что все они различны.

Пойдем от противного. Пусть $\exists k, l < n :\ k \neq l\ [ka]_n = [la]_n$.

$$[ka]_n - [la]_n = 0,$$
$$[a(k-l)]_n = 0,$$

поэтому $(k-l) \vdots n \Rightarrow k \equiv l\ (mod\ n)$. Получено противоречие. Значит, все элементы $[0]_n$, $[a]_n$, $[2a]_n$, $\ldots$, $[(n-1)a]_n$ уникальны, а поэтому среди них найдется элемент, равный единичному, то есть тот, что был получен путем умножения $[a]_n$ на обратный ему. $\square$

18 Вопрос

Характеристика поля. Понятие изоморфизма алгебраических структур, основные примеры.

Определение 18.1 (характеристика поля)**.** Наименьшее натуральное n, для которого в поле K выполняется

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = 0$$

называется **характеристикой** этого **поля** и обозначается $charK = n$.

Если такого n не существует, то поле K считается **полем нулевой характеристики**.

18.1 Понятие изоморфизма алгебраических структур

Определение 18.2 (гомоморфизм групп)**.** Отображение f группы $< G_1, \cdot >$ в группу $< G_2, * >$ называется **гомоморфизмом**, если

$$f(a \cdot b) = f(a) * f(b),$$

где $a, b \in G_1$.

Определение 18.3 (изоморфизм групп)**.** Если **гомоморфизм** f является также **биекцией**, то он называется **изоморфизмом**.

Определение 18.4 (автоморфизм группы)**.** Изоморфизм группы на себя называется **автоморфизмом**.

Примечание 18.1. гомоморфизм + биекция = изоморфизм

Примечание 18.2 (эти понятия для колец и полей)**.** Аналогично определяются понятия гомоморфизма, биекции, изоморфизма и автоморфизма для колец и полей. В их условие гомоморфизма лишь добавляется дополнительное условие:

$$f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$$

18.2 Примеры изоморфизма основных алгебраических структур

Пример 18.1 (изоморфизма групп)**.** Группа $G_1 =< \mathbb{R}, + >$ изоморфна группе $G_2 =< \mathbb{R}^+, \cdot >$, где $\mathbb{R}^+$ — множество всех положительных чисел, так как существует изоморфизм $f : G_1 \to G_2$, определяемый равенством

$$f(x) = e^x.$$

Действительно,

$$f(a + b) = e^{a+b} = e^a \cdot e^b = f(a) \cdot f(b),$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, $e^a, e^b \in \mathbb{R}^+$.

Пример 18.2 (изоморфизма полей)**.** В качестве примера изоморфизма полей можно привести отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ f(z) = \overline{z}$ ($\overline{z}$ — сопряженное комплексного числа).

19 Вопрос

Поле комплексных чисел. Теорема о существовании и единственности поля комплексных чисел.

Построим поле $\mathbb{C}$. Рассмотрим множество пар $(a, b) : a, b \in \mathbb{R}$. Определим в нем сложение и умножение следующим образом:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$
$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$$

$\mathbb{C}$ будет являться **аддитивной абелевой группой**. **Умножение дистрибутивно** относительно сложения, а также **умножение коммутативно**. Можно также убедиться в **ассоциативности умножения**. Отсюда следует, что $\mathbb{C}$ — **ассоциативное коммутативное кольцо**.

Заметим, что $(a, b)(1, 0) = (a, b)$, т.е. элемент $(1, 0)$ — **единица** кольца $\mathbb{C}$.

Обратный элемент $(a \neq 0 \ \wedge \ b \neq 0)$ выражается формулой $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$.

А это значит, что $\mathbb{C}$ — **поле**.

Из равенств

$$(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0)$$
$$(a_1, 0)(a_2, 0) = (a_1a_2, 0)$$

вытекает, что операции над парами вида $(a, 0)$ можно отождествлять с операциями над их первыми компонентами, которые относятся к полю $\mathbb{R}$. Следовательно, можно отождествлять такие пары с вещественными числами a. Тогда $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Положим $i = (0, 1)$. Тогда $i^2 = (-1, 0) = -1$. $a + bi = (a, b)$ при $a, b \in \mathbb{R}$. Таким образом, каждый элемент поля $\mathbb{C}$ единственным образом представим в виде $a + bi$.

Построенное поле $\mathbb{C}$ называется **полем комплексных чисел**.

20 Вопрос

Тригонометрическая форма представления комплексного числа. Формула Муавра.

Определение 20.1. Комплексное число можно представить в тригонометрической форме:

$$c = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

где $r = |c| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\phi = \frac{a}{r}$, $\sin\phi = \frac{b}{r}$.

Теорема 20.1 (формула Муавра возведения комплексного числа в степень ≥ 1)**.**

$$c^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$$

Доказательство. Запишем подробнее:

$$\begin{aligned} c^n &= (r(\cos\phi + i\sin\phi))^n = r^n(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \\ &= r^n \underbrace{(\cos\phi + i\sin\phi)\dots(\cos\phi + i\sin\phi)}_{n} = \\ &= r^n(\cos(\underbrace{\phi + \dots + \phi}_{n}) + i\sin(\underbrace{\phi + \dots + \phi}_{n})) = \\ &= r^n(\cos(n\phi) + \sin(n\phi)) \end{aligned}$$

□

21 Вопрос

Извлечение корней из комплексного числа.

Теорема 21.1 (формула извлечения корня из комплексного числа)**.**

$$\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\phi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\phi+2\pi k}{n})$$
$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

Доказательство. Распишем:

$$\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{r(\cos\phi + i\sin\phi)} = z$$
$$c = z^n$$
$$z = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),\ \rho, \psi = ?$$

$$r(\cos\phi + i\sin\phi) = (\rho(\cos\psi + i\sin\psi))^n$$
$$r(\cos\phi + i\sin\phi) = \rho^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi))$$

$$r = \rho^n \Rightarrow \sqrt[n]{r} = \rho$$
$$\phi + 2\pi k = n\psi \Rightarrow \frac{\phi+2\pi k}{n} = \psi$$

$$\sqrt[n]{c} = z = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\phi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\phi + 2\pi k}{n})$$
$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

□

22 Вопрос

Определение алгебры над произвольным полем. Основные примеры: алгебра геометрических векторов, алгебра матриц, алгебра кватернионов.

Определение 22.1 (алгебра над полем)**. Алгеброй** над полем K называется множество A с операцией сложения, умножения и умножения на элемент поля K, обладающими следующими свойствами:

1. A — векторное пространство относительно сложения и умножения на элементы поля K.
2. A — кольцо относительно сложения и умножения.
3. Ассоциативность умножения на элемент поля K: $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b), \forall\lambda \in K, \forall a, b \in A$.

Пример 22.1 (алгебра геометрических векторов)**.** Геометрические векторы — алгебра над полем $\mathbb{R}$.

Доказательство. Докажем, что геометрические векторы — алгебра над полем $\mathbb{R}$.

Очевидно, что $< V, +, \dot{\lambda} >$ ($\dot{\lambda}$ — операция умножения вектора на число) является векторным пространством над полем $\mathbb{R}$.

Проверим, является ли $< V, +, \times >$ ($\times$ — операция векторного умножения) кольцом. Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$.

1. Замкнутость операции $+$. Выполняется по определению.
2. Замкнутость операции $\times$. Выполняется по определению.
3. Коммутативность $+$. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
4. Ассоциативность $+$. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.
5. Существование нуля $+$. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
6. Существование обратного $+$. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.
7. Дистрибутивность $\times$ относительно $+$. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$. (по свойству)

Таким образом, $< V, +, \times >$ — кольцо.

Убедимся в том, что выполняется последнее условие $\forall\lambda \in \mathbb{R}\ \lambda[\vec{a}\vec{b}] = [\lambda\vec{a}\vec{b}] = [\vec{a}\lambda\vec{b}]$. Действительно, данные равенства справедливы для операции $\times$ векторного умножения.

Значит, геометрические векторы являются алгеброй над полем $\mathbb{R}$. □

Пример 22.2 (алгебра матриц)**.** Множество матриц размерности $n\times m$ вида $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ являются алгеброй над полем $\mathbb{R}$.

Доказательство. Докажем, что множество матриц размерности $n \times m$,

$$\mathbb{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} : \ \forall k \leq n \ \forall l \leq m \ a_k^l \in \mathbb{R} \right\},$$

с операциями матричного сложения, матричного умножения и умножения матрицы на число является алгеброй над полем $\mathbb{R}$.

Нетрудно убедиться, руководствуясь свойствами умножения матрицы на число, в том, что $< \mathbb{M}, +, \dot{\lambda} >$ (где $\dot{\lambda}$ — операция умножения матрицы на число) — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Проверим, является ли $< \mathbb{M}, +, \cdot >$ (где $\cdot$ — операция матричного умножения) кольцом. Пусть $A, B, C \in \mathbb{M}$.

1. Замкнутость $+$. Выполняется по определению.

2. Замкнутость $\cdot$. Выполняется по определению.

3. Коммутативность $+$. По свойству матричного сложения $A + B = B + A$.

4. Ассоциативность $+$. По свойству матричного сложения $A + (B + C) = (A + B) + C$.

5. Существование нуля $+$.
$$A + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = A$$

6. Дистрибутивность $\cdot$ относительно $+$. По свойству этих операций $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

Итак, $< \mathbb{M}, +, \cdot >$ — кольцо.

Осталось проверить, что выполняются следующие равенства: $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$. По свойству операции умножения матрицы на число выражение верно.

Значит, множество матриц размерности $n \times m$ является алгеброй над полем $\mathbb{R}$.

□

Пример 22.3 (алгебра кватернионов)**.** Кватернионы являются четырехмерной алгеброй над вещественными числами.

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} : \ w, z \in \mathbb{C} \right\},$$

где $z = a + ib \Rightarrow \overline{z} = a - ib$ — комплексное сопряжение.

$\mathbb{H}$ называется **кольцом кватернионов**.

Доказательство. Пусть $z = a + ib, \ w = c + id, \ a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Любой элемент h из $\mathbb{H}$ может быть представлен следующим образом

$$h = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix} =$$
$$= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$$

Руководствуясь ранее доказанными утверждениями об алгебре матриц нетрудно доказать, что $\mathbb{H} = \{a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ — алгебра над полем $\mathbb{R}$.

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

□

23 Вопрос

Системы координат. Векторная система координат с данным полюсом, аффинные и декартовы системы координат.

Определение 23.1. Системой координат на множестве M называется взаимно однозначное отображение непустой части M в другое множество K, на котором определена алгебраическая структура. Множество K называется координатным.

Пример 23.1. Для системы координат на плоскости в качестве координатного множества можно взять множество V_2 всех векторов на плоскости или двумерное арифметическое пространство $\mathbb{R}_2$, для системы координат в пространстве множество V_3 всех векторов пространства или трехмерное арифметическое пространство $\mathbb{R}_3$.

Определение 23.2. Системы координат, координатным множеством которых является V_2 или V_3, называются векторными, системы координат, координатным множеством которых является $\mathbb{R}_2$ или $\mathbb{R}_3$, называются арифметическими.

Определение 23.3. Возьмем какую-нибудь точку O, произвольный базис на плоскости $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и в пространстве $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Тройка, состоящая из точки O и базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ называется **аффинной системой координат на плоскости** и обозначается $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$; четверка $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ называется **аффинной системой координат в пространстве**.

Определение 23.4. Аффинная координатная система называется **прямоугольной декартовой**, если базис этой системы ортонормированный.

24 Вопрос

Полярная, сферическая и цилиндрическая системы координат.

Определение 24.1. Полярная система координат на ориентированной плоскости задается выбором точки O, называемой началом или полюсом, и луча, выходящего из точки O, называемого полярной осью.

Полярные координаты точки M — это радиус, равный растоянию от M до полюса $r = |OM|$, и угол ϕ, равный углу между полярной осью и лучом OM, причем угол измеряется в соответствии с ориентацией.

Справедлива следующая формула для перевода полярных координат в декартову систему координат

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

Определение 24.2. Полярная система координат в пространстве задается

1. ориентированной плоскостью π,

2. точкой O на ней,

3. лучом Ox на плоскости,

4. перпендикулярной к π осью Oz.

Для произвольной точки M пространства обозначим через M_π ее ортогональную проекцию на π, а через M_{Oz} — ее ортогональную проекцию на ось Oz. Цилиндрические координаты (ρ, ϕ, z) точки M определяются следующим образом:

- ρ, ϕ — полярные координаты M_π на плоскости π.

$$\rho = |OM_\pi|, \ \phi = (\widehat{Ox, OM_\pi}).$$

- z — координата M_{Oz} на оси Oz.

Сферические координаты (ρ, ϕ, θ) точки M определяются следующим образом:

- $\rho = |OM|$ (радиус).
- ϕ — угол от Ox к OM_π (долгота).
- θ — угол от OM_π к OM (широта). $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

25 Вопрос

Формулы преобразования координат точки в аффинной системе координат.

Теорема 25.1. $\varkappa = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\varkappa' = (O, \vec{e'}_1, \vec{e'}_2)$, $\vec{e'}_1(c_1^1, c_1^2)$, $\vec{e'}_2(c_2^1, c_2^2)$, $O'(x_0, y_0)$ в $\varkappa$. $M(x, y)$ в $\varkappa$, $M(x', y')$ в $\varkappa'$.

$$\begin{cases} x = x(x', y') = c_1^1 x' + c_2^1 y' + x_0 \\ y = y(x', y') = c_1^2 x' + c_2^2 y' + y_0 \end{cases}$$

Для двух декартовых систем координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $(O, \vec{i'}, \vec{j'})$ справедлива следующая формула

$$\begin{cases} x = \cos\alpha \cdot x' + \sin\alpha \cdot y' \\ y = -\sin\alpha \cdot x' + \cos\alpha \cdot y' \end{cases}$$

Доказательство.

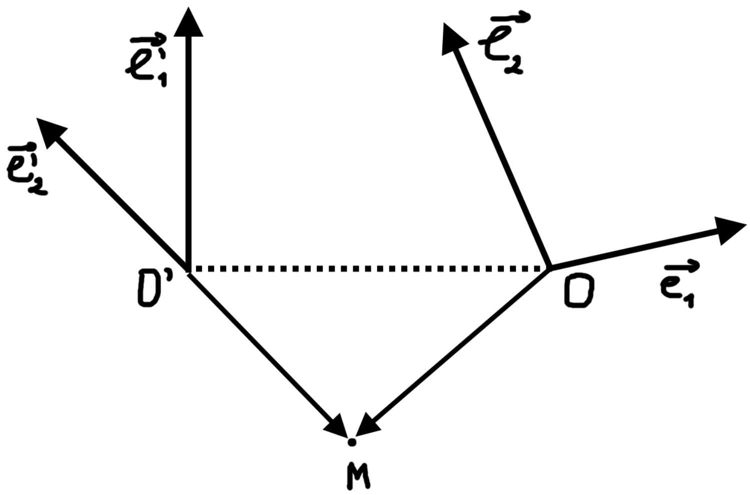
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2; \ \overrightarrow{O'M} = x'\vec{e'}_1 + y'\vec{e'}_2$$

$$\vec{e'}_1 = c_1^1\vec{e}_1 + c_1^2\vec{e}_2; \ \vec{e'}_2 = c_2^1\vec{e}_1 + c_2^2\vec{e}_2$$

$$\overrightarrow{OO'} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \Rightarrow\Rightarrow x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + x'\vec{e'}_1 + y'\vec{e'}_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = (x'c_1^1 + y'c_2^1 + x_0)\vec{e}_1 + (x'c_1^2 + y'c_2^2 + y_0)\vec{e}_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = x'c_1^1 + y'c_2^1 + x_0 \\ y = x'x_1^2 + y'c_2^2 + y_0 \end{cases}$$

$\square$



26 Вопрос

Основные формулы аналитической геометрии. Вектор, определяемый двумя точками. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении. Площадь треугольника. Объем тетраэдра.

Определение 26.1. Вектор, определяемый двумя точками.

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$$
$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

Определение 26.2. Расстояние между двумя точками.

$$\rho(A, B) = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(x_B^i - x_A^i)(x_B^j - x_A^j)}$$

Для декартовой системы координат

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Определение 26.3. Деление отрезка в данном отношении. Пусть на плоскости или в пространстве дан отрезок с началом A и концом B. C — точка прямой AB, отличная от B. Говорят, что точка C делит отрезок в отношении λ, если выполняется равенство

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}.$$

Точка C делит отрезок AB на плоскости или в пространстве $\Leftrightarrow$

$$x_C^i = \frac{x_A^i + \lambda x_B^i}{1 + \lambda}.$$

Определение 26.4. Площадь треугольника. Пусть на плоскости дан треугольник ABC. Площадь треугольника ABC на плоскости в аффинной системе координат определяется формулой

$$S_\triangle = \frac{\sqrt{g}}{2} modulus \left(\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} \right),$$

где g — дискриминант метрических параметров базиса системы координат.

В декартовой системе координат

$$S_\triangle = \frac{1}{2} modulus \left(\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{2} modulus \left(\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \right).$$

Площадь треугольника ABC в пространстве в декартовой системе координат

$$S_\triangle = \frac{1}{2} \sqrt{ \begin{vmatrix} y_B - y_A & z_B - z_A \\ y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_B - z_A & x_B - x_A \\ z_C - z_A & x_C - x_A \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}^2 }$$

Определение 26.5. Объем тетраэдра. Пусть в пространстве дан тетраэдр $SABC$. Объем тетраэдра в пространстве в аффинной системе координат

$$V_T = \frac{\sqrt{g}}{6} modulus \left(\begin{vmatrix} x_A - x_S & y_A - y_S & z_A - z_S \\ x_B - x_S & y_B - y_S & z_B - z_S \\ x_C - x_S & y_C - y_S & z_C - z_S \end{vmatrix} \right),$$

где g — дискриминант метрических параметров базиса.

Объем тетраэдра в декартовой системе координат:

$$V_T = \frac{1}{6} modulus \left(\begin{vmatrix} x_A - x_S & y_A - y_S & z_A - z_S \\ x_B - x_S & y_B - y_S & z_B - z_S \\ x_C - x_S & y_C - y_S & z_C - z_S \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{6} modulus \left(\begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_S & y_S & z_S & 1 \end{vmatrix} \right).$$

27 Вопрос

Основная теорема о прямой на плоскости.

Теорема 27.1. Каждая прямая на плоскости является фигурой первого порядка и обратно, каждая фигура первого порядка на плоскости является прямой. Другими словами, на плоскости множество всех прямых и множество всех фигур первого порядка совпадают.

Доказательство. Пусть l — некоторая прямая, $\varkappa$ — аффинная система координат на плоскости.

Найдем уравнение l в $\varkappa$. Пусть M_0 — некоторая точка прямой l, $\vec{a}$ — ненулевой вектор, параллельный l. Точку M_0 будем называть начальной, вектор $\vec{a}$ — направляющим для прямой l. Пусть в $\varkappa$ $M_0(x_0, y_0)$, $\vec{a}(a_1, a_2)$.

Пусть $M(x, y)$ — переменная, принимающая значения в множестве всех точек плоскости. Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$ $\Leftrightarrow$ точка M принадлежит прямой l.

$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$. Согласно признаку коллинеарности двух векторов в координатах получим:

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Это и есть искомое уравнение прямой l в $\varkappa$. Записав его в виде $a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0$, находим, что это есть алгебраическое уравнение. Так как $\vec{a} \neq \vec{0}$, то по крайней мере одна из координат a_1 или a_2 отлична от нуля. Следовательно, степень уравнения равна 1. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть на плоскости дана фигура первого порядка Φ уравнением в аффинной системе координат $\varkappa$

$$Ax + By + C = 0.$$

Уравнение равносильно уравнению $Ax + B(y + \frac{C}{B}) = 0$, которое в свою очередь равносильно уравнению

$$\begin{vmatrix} x & y + \frac{C}{B} \\ -B & A \end{vmatrix} = 0.$$

Возьмем на плоскости прямую l_1 с начальной точкой $M_1(0, -\frac{C}{B})$ и направляющим вектором $\vec{a}(-B, A)$. По первой части теоремы уравнением l_1 в $\varkappa$ будет последнее уравнение. Следовательно, фигура Φ совпадает с прямой l_1. Второе утверждение доказано. □

28 Вопрос

Условие параллельности вектора и прямой на плоскости.

Теорема 28.1. Пусть на плоскости заданы вектор $\vec{u}$ своими координатами и прямая l общим уравнением в аффинной системе координат $Ax + By + C = 0$. Тогда

$$\vec{u} \parallel l \Leftrightarrow Au_1 + Bu_2 = 0.$$

Доказательство. Согласно доказательству второй части основной теоремы о прямой на плоскости, вектор $\vec{a}(-B, A)$ является направляющим для l. Учитывая это и условие коллинеарности векторов в координатах, получим:

$$\vec{u} \parallel l \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ -B & A \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow Au_1 + Bu_2 = 0.$$

□

29 Вопрос

Основные виды уравнений прямой на плоскости.

1. **Общее уравнение**.

   $$Ax + By + C = 0 \ (A^2 + B^2 \neq 0)$$

   Вектор $\vec{a}(-B, A)$ является направляющим вектором этой прямой.

2. **Каноническое уравнение**. Задается через точку $M_0(x_0, y_0)$ и направляющий вектор $\vec{a}(a_1, a_2)$ в аффинной системе координат. Точка $M(x, y)$ лежит на прямой $\Leftrightarrow$

   $$l : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}.$$

3. Уравнение, заданное через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

   $$l : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

4. **Параметрические уравнения прямой**. Задается через точку $M_0(x_0, y_0)$ и направляющий вектор $\vec{a}(a_1, a_2)$ в аффинной системе координат. Точка $M(x, y)$ лежит на прямой $\Leftrightarrow$
$$\exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}.$$

5. **Уравнение прямой в отрезках**.
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

6. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Задается точкой $M_0(x_0, y_0)$ и угловым коэффициентом k и имеет вид
$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

30 Вопрос

Расположение точек относительно прямой на плоскости.

Определение 30.1. Пусть на плоскости даны l и $P \notin l$, $Q \notin l$. Точки P и Q лежат по разные стороны от прямой l, если отрезок $PQ \cap l$.

Короче
$$PlQ \Leftrightarrow [PQ] \cap l \neq \varnothing.$$

Теорема 30.1. Пусть на плоскости даны $l : Ax + By + C = 0$, $P(x_P, y_P)$, $Q(x_Q, y_Q) \notin l$ в аффинной системе координат. Тогда точки P и Q лежат по разные стороны от $l \Leftrightarrow$
$$(Ax_P + By_P + C)(Ax_Q + By_Q + C) < 0.$$

Доказательство.
$$P \notin l \Leftrightarrow Ax_P + By_P + C \neq 0;\ Q \notin l \Leftrightarrow Ax_Q + By_Q + C \neq 0$$
$$PlQ \Leftrightarrow [PQ] \cap l = M \Rightarrow \overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{MQ},\ \lambda > 0$$
$$x_M = \frac{x_P + \lambda x_Q}{1 + \lambda};\ y_M = \frac{y_P + \lambda y_Q}{1 + \lambda}$$
$$M \in l \Leftrightarrow Ax_M + By_M + C = 0$$
$$A \cdot \frac{x_P + \lambda x_Q}{1 + \lambda} + B \cdot \frac{y_P + \lambda y_Q}{1 + \lambda} + C = 0$$
$$A(x_P + \lambda x_Q) + B(y_P + \lambda y_Q) + C(1 + \lambda) = 0$$
$$Ax_P + By_P + C + \lambda(Ax_Q + By_Q + C) = 0,\ \lambda > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (Ax_P + By_P + C)(Ax_Q + By_Q + C) < 0$$

$\square$

31 Вопрос

Взаимное расположение прямых на плоскости.

Теорема 31.1. Даны две прямые

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0;\ l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

в аффинной системе координат.

$$r_1 = rk \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix};\ r_2 = rk \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

- $l_1 \cap l_2 \Leftrightarrow r_1 = 2$. То есть $\vec{a} \nparallel \vec{b}$.
- $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 2$. То есть $\vec{a} \parallel \vec{b}$ и $C_1 \neq C_2$.
- $l_1 = l_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = 1$. То есть $\vec{a} \parallel \vec{b}$ и $C_1 = C_2$.

32 Вопрос

Угловой коэффициент прямой на плоскости.

Теорема 32.1. Угловой коэффициент прямой l относительно декартовой системы координат на ориентированной плоскости равен тангенсу направленного угла между положительным направлением оси Ox и прямой l.

$$k = \operatorname{tg}\phi,\ \phi = (\widehat{Ox, l})$$

Доказательство.

$$a_1 = |\vec{a}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}\vec{i}}) = |\vec{a}| \cdot \cos\phi$$
$$a_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}\vec{j}}) = |\vec{a}| \cdot \sin\phi$$

$M(x_0, y_0)$; $y - y_0 = k(x - x_0)$,

$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \operatorname{tg}\phi.$$

□

33 Вопрос

Условие перпендикулярности вектора и прямой.

Теорема 33.1. Пусть на плоскости относительно декартовой системы координат даны вектор $\vec{a}(a_1, a_2)$ и прямая l с направляющим вектором $\vec{p}$. Тогда

$$\vec{a} \perp l \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{p}) = 0.$$

Доказательство. Пусть $\vec{a} \perp l$. Значит, $\vec{a} \perp \vec{p}$. Тогда $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{p}}) = 0$. А это значит, исходя из формулы скалярного произведения векторов, что

$$(\vec{a}, \vec{p}) = 0.$$

Пусть теперь $(\vec{a}, \vec{p}) = 0$. Тогда снова

$$\cos(\widehat{\vec{a}\vec{p}}) = 0 \Rightarrow \widehat{\vec{a}\vec{p}} = \widehat{\vec{a}l} = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{a} \perp l.$$

□

34 Вопрос

Угол между прямыми на плоскости.

Теорема 34.1. Пусть на плоскости даны две пересекающиеся прямые l_1 и l_2 общими уравнениями в декартовой системе координат $\varkappa$

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

соответственно. Тогда мера угла между ними может быть вычислена по одной из следующих трех формул:

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \ \sin\theta = \frac{|A_1B_2 - B_1A_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$
$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|.$$

Если данные прямые не параллельны координатной прямой Oy, то меру угла между ними можно вычислить также по формуле

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|,$$

где k_1 и k_2 — угловые коэффициенты прямых l_1 и l_2 относительно $\varkappa$ соответственно.

Доказательство. Векторы $\vec{n}_1(A_1, B_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2)$ перпендикулярны l_1 и l_2 соответственно.

$$\theta = \begin{cases} \widehat{\vec{n}_1\vec{n}_2}, \text{ если } \widehat{\vec{n}_1\vec{n}_2} \le \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - \widehat{\vec{n}_1\vec{n}_2}, \text{ если } \widehat{\vec{n}_1\vec{n}_2} > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\cos\theta = \begin{cases} \cos(\widehat{\vec{n}_1\vec{n}_2}), \text{ если } \widehat{\vec{n}_1\vec{n}_2} \le \dfrac{\pi}{2} \\ -\cos(\widehat{\vec{n}_1\vec{n}_2}), \text{ если } \widehat{\vec{n}_1\vec{n}_2} > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\cos\theta = \frac{|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \frac{|A_1B_2 - B_1A_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|.$$

Если прямые l_1 и l_2 не параллельны координатной прямой Oy, то их угловые коэффициенты определяются равенствами $k_1 = -\frac{A_1}{B_1}, k_1 = -\frac{A_2}{B_2}$.

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\left(\frac{A_1B_2}{B_1B_2} - \frac{A_2B_1}{B_1B_2}\right) : \left(\frac{A_1A_2}{B_1B_2} + \frac{B_1B_2}{B_1B_2}\right)\right| = \left|\frac{-k_1 + k_2}{k_1k_2 + 1}\right|.$$

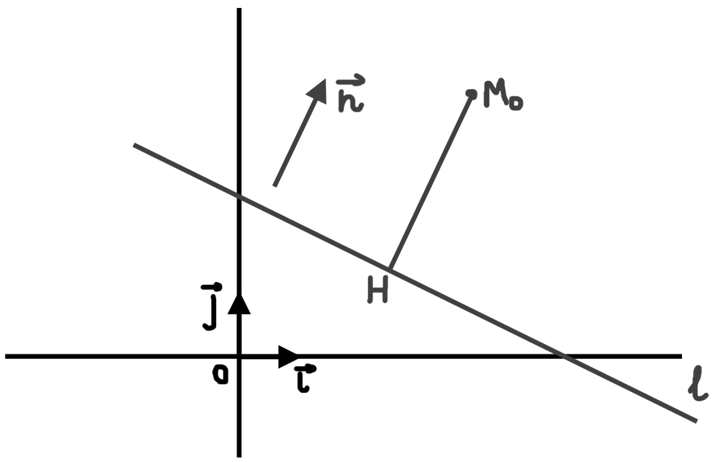
□

35 Вопрос

Расстояние от точки до прямой на плоскости.

Теорема 35.1. Пусть на плоскости относительно декартовой системы координат заданы прямая $l : Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0) \notin l$. Тогда

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$



Доказательство. $M_0H = \rho(M_0, l)$.

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{M_0H}(x_H - x_0, y_H - y_0) \perp l \\ \vec{n}(A, B) \perp l \end{aligned}\right| \Rightarrow \vec{n} \parallel \overrightarrow{M_0H}.$$

$$(\vec{n}, \overrightarrow{M_0H}) = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{M_0H}| \cdot \underbrace{\cos(\widehat{\vec{n}\overrightarrow{M_0H}})}_{\pm 1}$$

$$|(\vec{n}, \overrightarrow{M_0H})| = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{M_0H}|$$

$$|\overrightarrow{M_0H}| = \frac{|(\vec{n}, \overrightarrow{M_0H})|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_H - x_0) + B(y_H - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

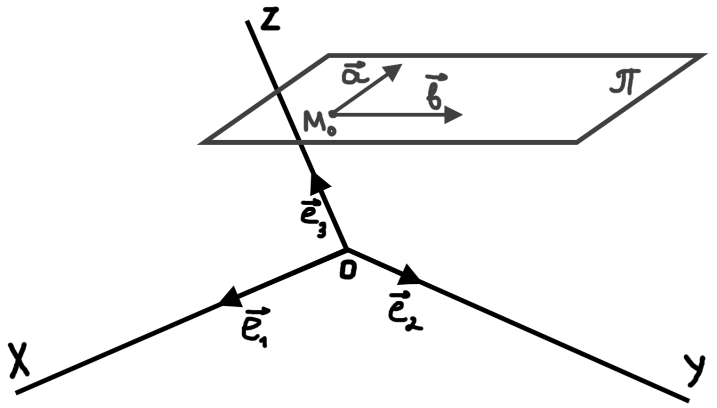
$$= \frac{|\overbrace{Ax_H + By_H}^{-C} - Ax_0 - By_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

□

36 Вопрос

Основная теорема о плоскости в пространстве.

Теорема 36.1. В пространстве каждая плоскость является фигурой первого порядка и обратно, каждая фигура первого порядка в пространстве является плоскостью. Другими словами, в пространстве множество всех плоскостей и множество всех фигур первого порядка совпадают.



Доказательство. Пусть π — некоторая плоскость, $\varkappa$ — афинная система координат в пространстве.

Найдем уравнение π в $\varkappa$. Пусть M_0 — некоторая точка, $M_0 \in \pi$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ — два вектора, $\vec{a} \parallel \pi$, $\vec{b} \parallel \pi$, $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Точку M_0 будем называть начальной, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ — направляющими для плоскости π.

$$M_0(x_0, y_0, z_0),\ \vec{a}(a_1, a_2, a_3),\ \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$$

Пусть $M(x, y, z)$ — переменная, принимающая значение в множестве точек пространства.

$$Cp(\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}) \Leftrightarrow M \in \pi.$$

$\overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$. Согласно признаку компланарности трех векторов в координатах получим

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Это и есть искомое уравнение плоскости π в $\varkappa$. Преобразуем его

$$(x-x_0)\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - (y-y_0)\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + (z-z_0)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

$\vec{a} \nparallel \vec{b} \Rightarrow$ координаты не пропорциональны $\Rightarrow$ хотя бы один из определителей в уравнении отличен от нуля. Таким образом, это уравнение является алгебраическим уравнением первой степени.

Пусть в пространстве дана фигура первого порядка Φ уравнением в аффинной системе координат $\varkappa$

$$Ax + By + Cz + D = 0\ (C \neq 0).$$

Оно равносильно уравнениям

$$Ax + By + C(z + \frac{D}{C}) = 0, \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z + \frac{D}{C} \\ C & 0 & -A \\ 0 & C & -B \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

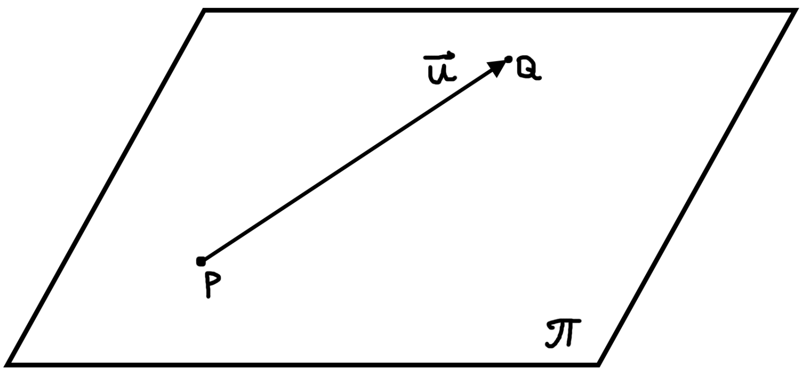
Возьмем плоскость π_1 с начальной точкой $M_1(0, 0, -\frac{D}{C})$ и направляющими векторами $\vec{s}(C, 0, -a)$, $\vec{t}(0, C, -B)$. Согласно доказанной первой части теоремы уравнением π_1 в $\varkappa$ будет уравнение (2). Следовательно, фигура Φ совпадает с плоскостью π_1. Теорема доказана. □

37 Вопрос

Условие параллельности вектора и плоскости. Исследование общего уравнения плоскости.

Теорема 37.1. Пусть в пространстве заданы вектор $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ и плоскость $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ относительно аффинной системы координат. Тогда

$$\vec{u} \parallel \pi \Leftrightarrow Au_1 + Bu_2 + Cu_3 = 0.$$



Доказательство. Пусть $P \in \pi$. Тогда будет справедливо равенство

$$Ax_P + By_P + Cz_P + D = 0.$$

Отложим вектор $\vec{u}$ от точки P. Конец построенного представителя вектора $\vec{u}$ обозначим Q. Тогда

$$u_1 = x_Q - x_P,\ u_2 = y_Q - y_P,\ u_3 = z_Q - z_P.$$

Получим:

$$\begin{gathered} \vec{u} \parallel \pi \Leftrightarrow Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A(x_P + u_1) + B(y_P + u_2) + C(z_P + u_3) + D = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underbrace{Ax_P + By_P + Cz_P + D}_{0} + Au_1 + Bu_2 + Cu_3 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Au_1 + Bu_2 + Cu_3 = 0. \end{gathered}$$

□

Свойство 37.1 (исследование общего уравнения плоскости)**.** Плоскость π, заданная общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ в аффинной системе координат,

1. $O(0,0,0) \in \pi \Leftrightarrow D = 0$.
2. $\pi \parallel Ox \Leftrightarrow A = 0 \wedge D \neq 0$.
3. $\pi \parallel XOY \Leftrightarrow A = 0 \wedge B = 0 \wedge D \neq 0$.
4. $OX \subset \pi \Leftrightarrow A = 0 \wedge D = 0$.
5. $\pi = XOY \Leftrightarrow A = 0 \wedge B = 0 \wedge D = 0$.

38 Вопрос

Взаимное расположение плоскостей в пространстве.

Теорема 38.1. Пусть в аффинной системе координат даны

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$r_1 = rk \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}, \ r_2 = rk \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

1. $\pi_1 \cap \pi_2 \Leftrightarrow r_1 = 2$.
2. $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow r_1 = 1, r_2 = 2$.
3. $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = 1$.

Для трех плоскостей π_1, π_2, π_3:

$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = M \Leftrightarrow r_3 = rk \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 3.$$

39 Вопрос

Расположение точек относительно плоскости в пространстве.

Теорема 39.1. Пусть в аффинной системе координат задана общим уравнением плоскость $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ и две точки P и Q, не лежащие в плоскости π. Эти точки будут располагаться по разные стороны от плоскости $\pi \Leftrightarrow$

$$(Ax_P + By_P + Cz_P + D)(Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D) < 0.$$

Доказательство. $P\pi Q \Leftrightarrow [PQ]\cap\pi = M \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PM} = \lambda\overrightarrow{MQ},\ \lambda > 0$$

$$x_M = \frac{x_P + \lambda x_Q}{1+\lambda};\ y_M = \frac{y_P + \lambda y_Q}{1+\lambda};\ z_M = \frac{z_P + \lambda z_Q}{1+\lambda}$$

$$M \in \pi \Leftrightarrow Ax_M + By_M + Cz_M + D = 0$$

$$A \cdot \frac{x_P + \lambda x_Q}{+} B \cdot \frac{y_P + \lambda y_Q}{1+\lambda} + C \cdot \frac{z_P + \lambda z_Q}{1+\lambda} + D = 0$$

$$A(x_P + \lambda x_Q) + B(y_P + \lambda y_Q) + C(z_P + \lambda z_Q) + D(1+\lambda) = 0$$

$$Ax_P + By_P + Cz_P + D + \lambda(Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D) = 0,\ \lambda > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Ax_P + By_P + Cz_P + D)(Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D) < 0$$

□

40 Вопрос

Основные виды уравнений плоскости в пространстве в аффинных и декартовых координатах.

1. **Общее уравнение** плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

2. Уравнение плоскости, проходящей **через точку** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **перпендикулярно вектору** $\vec{N}(A, B, C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

3. Уравнение плоскости, проходящей **через точку** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **параллельно двум неколлинеарным векторам** $\vec{a}(a_1, a_2, a_3),\ \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

4. **Параметрические уравнения** плоскости:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 \\ y = y_0 + a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 \\ z = z_0 + a_3\lambda_1 + b_3\lambda_2 \end{cases}$$

5. Уравнение плоскости, проходящей **через три** данные **точки** $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Уравнение плоскости **в отрезках** (a, b, c — величины отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях Ox, Oy, Oz, соответственно):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

41 Вопрос

Основная теорема о прямой в пространстве.

Теорема 41.1. Каждая прямая в пространстве в аффинной системе координат определяется системой двух линейных уравнений с тремя действительными переменными, ранг матрицы которой равен 2. Эта система называется общими уравнениями прямой.

Обратно, каждая система двух уравнений с тремя действительными переменными, ранг матрицы которой 2, в аффинной системе координат определяет прямую.

Доказательство. Пусть в пространстве дана прямая l относительно аффинной системы координат, а также две плоскости $\pi_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$, $\pi_1 \cap \pi_2$.

$$\pi_1 \cap \pi_2 = l \Rightarrow l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Пусть теперь дана система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

и

$$rk \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2.$$

По основной теореме о плоскости в пространстве каждое из уравнений системы задает плоскость. Тогда по условию пересечения двух плоскостей графиком системы (3) будет прямая. □

42 Вопрос

Условие параллельности вектора и прямой в пространстве.

Теорема 42.1. Пусть в аффинной системе координат даны прямая $l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ и вектор $\vec{t}(t_1, t_2, t_3)$. Тогда

$$\vec{t} \parallel l \Leftrightarrow \frac{t_1}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{t_2}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{t_3}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

Доказательство. $l = \pi_1 \cap \pi_2$. $\vec{t} \parallel l \Leftrightarrow (\vec{t} \parallel \pi_1 \wedge \vec{t} \parallel \pi_2) \Leftrightarrow$

$$(A_1t_1 + B_1t_2 + C_1t_3 = 0 \wedge A_2t_1 + B_2t_2 + C_2t_3 = 0).$$

Перепишем последнее условие в виде системы

$$\begin{cases} A_1t_1 + B_1t_2 = -C_1t_3 \\ A_2t_1 + B_2t_2 = -C_2t_3 \end{cases}$$

Решим эту систему методом Крамера.

$$\triangle = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix};\ \triangle_1 = \begin{vmatrix} -C_1t_3 & B_1 \\ -C_2t_3 & B_2 \end{vmatrix};\ \triangle_2 = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1t_3 \\ A_2 & -C_2t_3 \end{vmatrix}.$$

$$t_1 = \frac{\triangle_1}{\triangle} = \frac{\begin{vmatrix} -C_1t_3 & B_1 \\ -C_2t_3 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{t_3\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{t_3\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Аналогично

$$t_2 = \frac{t_3\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Тогда справедливо равенство

$$\frac{t_1}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{t_2}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{t_3}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

□

43 Вопрос

Основные виды уравнений прямой в пространстве в аффинных и декартовых координатах.

1. **Каноническое уравнение**. Прямая, заданная точкой $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$ и направляющим вектором $\vec{a}(a_1, a_2, a_3) \parallel l$:
$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

2. **Параметрическое уравнение прямой**. $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l, \vec{a}(a_1, a_2, a_3) \parallel l, M(x, y, z)$ — переменная, принимающая значение любой точки пространства:
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

3. Уравнение прямой, заданной **через две точки** пространства. $M_1(x_1, y_1, z_1) \in l$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in l$:
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

44 Вопрос

Взаимное расположение двух прямых, прямой и плоскости в пространстве.

Теорема 44.1 (взаимное расположение двух прямых в пространстве)**.** Пусть в аффинной системе координат две прямые заданы через точку и направляющий вектор:

$$l_1 : M_1(x_1, y_1, z_1) \in l_1,\ \vec{a}(a_1, a_2, a_3) \parallel l_1$$
$$l_2 : M_2(x_2, y_2, z_2) \in l_2,\ \vec{b}(b_1, b_2, b_3) \parallel l_2$$

Тогда

1. l_1 и l_2 скрещивающиеся $\Leftrightarrow$

$$\neg Cp(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{M_1M_2})$$
$$\text{или } r_1 = rk \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{pmatrix} = 3$$
$$\text{или} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

2. $l_1 \cap l_2 \Leftrightarrow$

$$Cp(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{M_1M_2}) \wedge (\vec{a} \nparallel \vec{b})$$
$$\text{или } r_1 = 2 \wedge r_2 = rk \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 2.$$

3. $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow$

$$Cp(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{M_1M_2}) \wedge (\vec{a} \parallel \vec{b}) \wedge (M_1 \notin l_2)$$
$$\text{или } r_1 = 2 \wedge r_2 = 1.$$

4. $l_1 = l_2 \Leftrightarrow$

$$r_1 = 1.$$

Теорема 44.2 (взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве)**.** Пусть в аффинной системе координат заданы прямая $l : M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$, $\vec{a}(a_1, a_2, a_3) \parallel l$ и плоскость $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда

1. $l \cap \pi \Leftrightarrow$

$$\vec{a} \nparallel \pi$$
$$\text{или } Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0.$$

2. $l \parallel \pi \Leftrightarrow$

$$(\vec{a} \parallel \pi) \wedge (M_0 \notin \pi)$$
$$\text{или} \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$$

3. $l \subset \pi \Leftrightarrow$

$$(\vec{a} \parallel \pi) \wedge (M_0 \in \pi).$$

45 Вопрос

Угол между прямыми в пространстве, между плоскостями и между прямой и плоскостью.

Теорема 45.1 (угол между прямыми в пространстве)**.** Пусть заданы две прямые $l_1 : M_1 \in l_1,\ \vec{a} \parallel l_1,\ l_2 : M_2 \in l_2,\ \vec{b} \parallel l_2$. (Очевидно, что $\widehat{l_1, l_2} = \widehat{\vec{a}\vec{b}}$.)

Тогда

$$\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \frac{|(\vec{a}, \vec{b})|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$\sin(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \frac{|[\vec{a}, \vec{b}]|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Определение 45.1 (угол между плоскостями в пространстве)**.** Угол между плоскостями есть угол между нормальными векторами этих плоскостей.

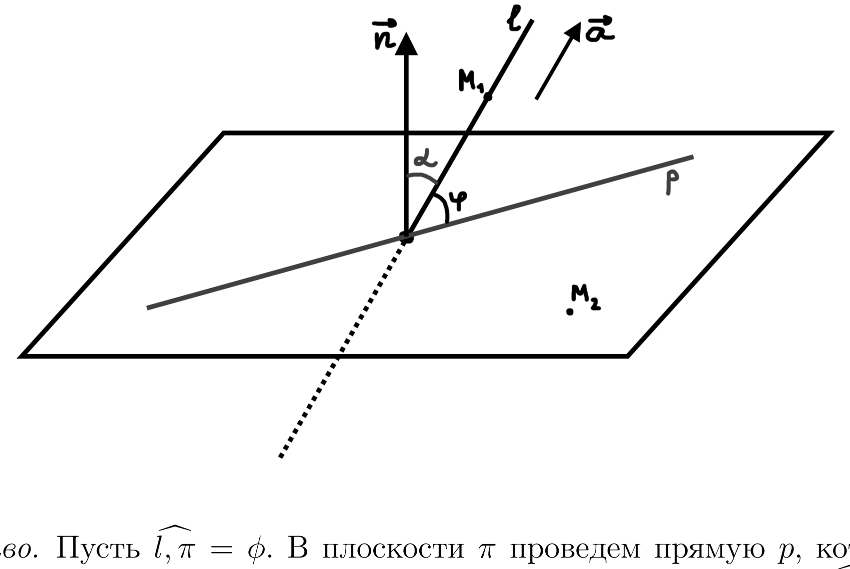
Теорема 45.2. Пусть даны две плоскости $\pi_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$, $\pi_1 \cap \pi_2$. $\vec{N}_1 \perp \pi_1,\ \vec{N}_2 \perp \pi_2$. Тогда

$$\cos(\widehat{\pi_1, \pi_2}) = \cos(\widehat{\vec{N}_1\vec{N}_2});\ \sin(\widehat{\pi_1, \pi_2}) = \sin(\widehat{\vec{N}_1\vec{N}_2});\ \operatorname{tg}(\widehat{\pi_1, \pi_2}) = \operatorname{tg}(\widehat{\vec{N}_1\vec{N}_2}).$$

Теорема 45.3 (угол между прямой и плоскостью в пространстве)**.** Пусть в пространстве даны прямая $l : M_1 \in l,\ \vec{a} \parallel l$, и плоскость $\pi : M_2 \in \pi,\ \vec{n} \perp \pi,\ l \cap \pi$. Тогда

$$\cos\phi = \frac{|[\vec{a}, \vec{n}]|}{|\vec{a}||\vec{n}|}$$

$$\sin\phi = \frac{|(\vec{a}, \vec{n})|}{|\vec{a}||\vec{n}|}$$



Доказательство. Пусть $\widehat{l, \pi} = \phi$. В плоскости π проведем прямую p, которая будет являться ортогональной проекцией прямой l на плоскость π. Тогда $\phi = \widehat{l, p}$. Угол между нормалью π и прямой l обозначим $\alpha = \widehat{\vec{a}\vec{n}} = 90^\circ - \phi$.

$$\cos\phi = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha = \frac{|[\vec{a}, \vec{n}]|}{|\vec{a}||\vec{n}|},$$

$$\sin\phi = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha = \frac{|(\vec{a}, \vec{n})|}{|\vec{a}||\vec{n}|}.$$

□

46 Вопрос

Расстояние от точки до плоскости и прямой в пространстве.

Теорема 46.1. Пусть в декартовой системе координат заданы плоскость $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ и $M_0(x_0, y_0, z_0) \notin \pi$. Тогда

$$\rho(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Доказательство. $\vec{n}(A, B, C) \perp \pi$. Пусть $M_0H \perp \pi$, $H(x_H, y_H, z_H) \in \pi \Rightarrow$

$$Ax_H + By_H + Cz_H + D = 0 \Leftrightarrow D = -Ax_H - By_H - Cz_H.$$

$$|\overrightarrow{HM_0}| = \rho(M_0, \pi).\ \vec{n} \parallel \overrightarrow{HM_0} \Rightarrow \widehat{\vec{n}\overrightarrow{HM_0}} = \begin{cases} 0^\circ, & \vec{n} \uparrow\uparrow \overrightarrow{HM_0} \\ 180^\circ, & \vec{n} \uparrow\downarrow \overrightarrow{HM_0} \end{cases}$$

$$(\vec{n}, \overrightarrow{HM_0}) = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{HM_0}| \cdot \underbrace{\cos(\widehat{\vec{n}\overrightarrow{HM_0}})}_{\pm 1};$$

$$|\overrightarrow{HM_0}| = \frac{|(\vec{n}, \overrightarrow{HM_0})|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_0 - x_H) + B(y_0 - y_H) + C(z_0 - z_H)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 \overbrace{-Ax_H - By_H - Cz_H}^{D}|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

□

Теорема 46.2. Пусть в декартовой системе координат задана прямая $l : M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$, $\vec{a}(a_1, a_2, a_3) \parallel l$ и точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Тогда

$$\rho(M_1, l) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

Доказательство. $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{a}$ равна $S = |[\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{a}]|$. Но в то же время $S = h \cdot |\vec{a}|$. h в данном случае и будет искомым расстоянием от точки до прямой:

$$\rho(M_1, l) = h = \frac{S}{|\vec{a}|} = \frac{|[\vec{a}, \overrightarrow{M_0M_1}]|}{|\vec{a}|} =$$

$$= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

□

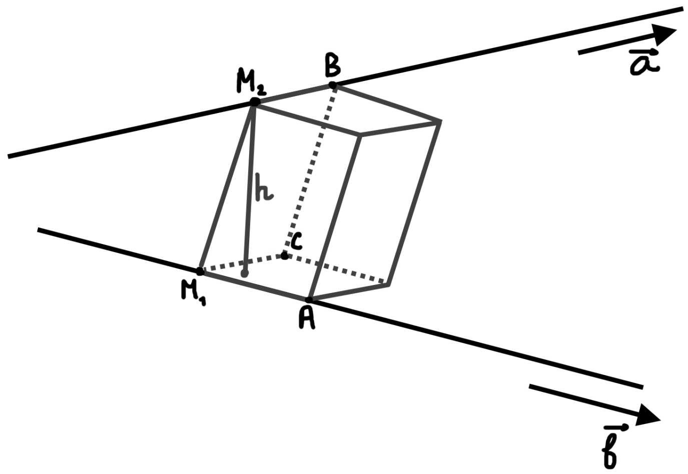
47 Вопрос

Кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми.

Теорема 47.1. В декартовой системе координат даны две скрещивающиеся прямые: l_1 : $M_1(x_1, y_1, z_1) \in l_1,\ \vec{a}(a_1, a_2, a_3) \parallel l_1,\ l_2 : M_2(x_2, y_2, z_2) \in l_2,\ \vec{b}(b_1, b_2, b_3) \parallel l_2$.

Тогда

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\vec{a}\vec{b}|}{|[\vec{a}, \vec{b}]|}.$$



Доказательство. $\overrightarrow{M_1A} = \vec{a}$, $\overrightarrow{M_1C} = \vec{b}$. Рассмотрим параллелепипед со сторонами, образованными векторами $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1C}$, $\overrightarrow{M_1A}$.

$V_{\text{пар}} = S_{\text{осн}} \cdot h$. Но с другой стороны $V_{\text{пар}} = |\overrightarrow{M_1M_2}\vec{a}\vec{b}|$. Поэтому

$$\rho(l_1, l_2) = h = \frac{V_{\text{пар}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\vec{a}\vec{b}|}{|[\vec{a}, \vec{b}]|}.$$

□