Предположим, что имеется некоторое поле $\mathbb{C}$, содержащее поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел и некий элемент i, квадрат которого равен -1, и посмотрим, как оно должно быть устроено.

Наряду с элементом i поле $\mathbb{C}$ должно содержать элементы $a+bi$, где a и b - любые вещественные числа.Докажем, что все эти элементы различны. Пусть $a_1+b_1i=a_2+b_2i$, $a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbb{R}$. Тогда

$$a_1-a_2=(b_1-b_2)i.$$

Возводя это равенство в квадрат, получаем

$$(a_1-a_2)^2=i^2(b_1-b_2)^2\Leftrightarrow(a_1-a_2)^2=-(b_1-b_2)^2\Leftrightarrow(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2=0,$$

откуда

$$a_1-a_2=b_1-b_2=0,$$

т.е. $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, что и требовалась доказать.

Из свойств операций в поле и соотношения $i^2=-1$ следует, что

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)&=a_1a_2+b_1a_2i+a_1b_2i+b_1b_2i^2=\\&=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i,\end{aligned} \tag{2}$$

Это показывает, подмножество $K=\{a+bi:a,b\in\mathbb{R}\}$ замкнуто относительно сложения и умножения. Из формулы (1) следует, что

$$-(a+bi)=(-a)+(-b)i\in K, \tag{3}$$

а из формулы (2) - что

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.\in\mathbb{R}$$

Найдем обратный элемент. Пусть $(a+bi)^{-1}=x+yi$.

$$(a+bi)(x+yi)=1$$

$$(ax-by)+(ay+bx)i=1\Leftrightarrow\begin{cases}ax-by=1,\\bx+ay=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{a}{a^2+b^2},\\y=-\frac{b}{a^2+b^2}\end{cases}$$

$$(a+bi)^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}+\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i\in K\quad\text{при}\quad a^2+b^2\neq0. \tag{4}$$

Следовательно, K - подполе поля $\mathbb{C}$. Так как поле K уже содержит поле вещественных чисел и квадратный корень из -1 (а значит, квадратный корень из любого отрицательного числа), то нам нет необходимости рассматривать какое-то большее поле, т.е. можно считать, что $\mathbb{C} = K$.

Предыдущее исследование подсказывает, как можно построить поле комплексных чисел. Рассмотрим множество $\mathbb{C}$ пар (a, b), где $a, b \in \mathbb{R}$. Определим в нем сложение и умножение по формулам

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2),$$

подсказанными формулами (1) и (2). Очевидно, что $\mathbb{C}$ является абелевой группой относительно сложения, умножение дистрибутивно относительно сложения и умножение коммутативно. Непосредственной выкладкой проверяется ассоциативность умножения:

$$((a_1, b_1)(a_2, b_2))(a_3, b_3) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)(a_3, b_3) =$$

$$= (a_1a_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3 - b_1b_2a_3, b_1a_2a_3 + a_1b_2a_3 + a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3) =$$

$$= (a_1, b_1)(a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3) = (a_1, b_1)((a_2, b_2)(a_3, b_3)).$$

Таким образом, $\mathbb{C}$ - коммутативное ассоциативное кольцо.

Так как

$$(a, b)(1, 0) = (a, b),$$

то элемент $(1, 0)$ - единица кольца $\mathbb{C}$. Формула (4) подсказывает, как должен выглядеть элемент, обратный к (a, b) при $a^2 + b^2 \neq 0$. Действительно, непосредственная проверка показывает, что

$$(a, b)\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right) = (1, 0).$$

Следовательно, $\mathbb{C}$ - поле.

Далее,

$$(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0),$$

$$(a_1, 0)(a_2, 0) = (a_1a_2, 0),$$

т.е. операции над парами вида $(a, 0)$ сводятся к соответсвующим операциям над их первыми компонентами. Условимся отождествлять пару $(a, 0)$ с вещественным числом a. Тогда можно сказать, что построенное поле $\mathbb{C}$ содержит поле $\mathbb{R}$ в качестве подполя.

Положим $i = (0, 1)$; тогда

$$i^2 = (-1, 0) = -1,$$

$$a + bi = (a, b) \quad \text{при} \quad a, b, \in \mathbb{R}$$

Таким образом, каждый элемент поля $\mathbb{C}$ однозначно представляется в виде $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$.

Построенное поле $\mathbb{C}$ называется *полем комплексных чисел.*