Ответы на вопросы билетов коллоквиума

Мангасарян Евгений

Октябрь 2021

1 Вопрос

Ограниченные множества. Верхняя и нижняя грани числовых множеств. Свойства граней.

Определение. *Множество X называется ограниченным сверху, если*

$$\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \leq M$$

При этом M называется мажорантой.

Определение. *Множество X называется ограниченным снизу, если*

$$\exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \leq m$$

При этом m называется минорантой.

Определение. *Множество X называется ограниченным, если оно ограничено и сверху, и снизу.*

Определение. *Наименьшая из всех мажорант ограниченного сверху множества называется верхней гранью этого множества.*

$$(\forall x \in X\ x \leq a) \land (\forall a' \leq a\ \exists x' \in X\ x' > a') \Rightarrow a = \sup X$$

Определение. *Наибольшая из всех минорант ограниченного снизу множества называется нижней гранью этого множества* $\inf X$.

$$(\forall x \in X\ x \geq a) \land (\forall a' \geq a\ \exists x' \in X\ x' < a') \Rightarrow a = \inf X$$

Признак того, что число a является верхней [нижней] гранью множества можно еще сформулировать так:

Определение. $a = \sup X$, *если*

1. $\forall x \in X\ x \leq a$

2. $\forall \epsilon > 0 \ \exists x_\epsilon \in X \ x_\epsilon > a - \epsilon$

Определение. $a = \inf X$, *если*

1. $\forall x \in X \ x \geq a$

2. $\forall \epsilon > 0 \ \exists x_\epsilon \in X \ x_\epsilon < a + \epsilon$

Свойства (некоторые свойства граней)**.** *Приведем полезные свойства граней.*

1. *Переход к грани в неравенстве.*

$$\forall x \in X : x \leq a \Rightarrow \sup X \leq a$$

$$\forall x \in X : x \geq a \Rightarrow \inf X \geq a$$

2. *Монотонность граней.*

$$X \subset Y, \exists \sup Y \Rightarrow \sup X \leq \sup Y$$

$$X \subset Y, \exists \inf Y \Rightarrow \inf X \geq \inf Y$$

3. *О максимальном и минимальном элементах органиченного множества.*

$$x_0 = max(X) \Rightarrow \sup X = x_0$$

$$x_0 = min(X) \Rightarrow \inf X = x_0$$

2 Вопрос

Теорема 1 (о существовании верхней грани)**.** *У любого непустого ограниченного сверху множества существует верхняя грань.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\exists x \in X \ x \geq 0$.

Рассмотрим $\forall x \in X \ [x]$. $\forall x \in X \ x \leq M \Rightarrow \forall x \in X \ [x] \leq M$. Обозначим наибольшую $[x]$ a_0.

Рассмотрим $\forall x \in X : [x] = a_0$ и их первые десятичные знаки после запятой. Наибольший элемент обозначим a_1.

Рассмотрим $x \in X$ такие, что их целая часть равна a_0, первая цифра после запятой a_1. Обозначим наибольший второй десятичный знак после запятой среди этих чисел a_2.

Продолжая, мы определим некоторое число

$$a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

Докажем, что $a = \sup X$. Так как $a \geq 0$, то $\forall x \in X : x < 0 \ a > x$. Докажем, что $\forall x \in X : x \geq 0 \ x \leq a$. Пойдем от противного. Пусть некоторый неотрицательный

$x = x_0, x_1x_2 \dots x_n \dots$ множества X не удовлетворяет неравенству $x \leq a$. Тогда $x > a$, и $\exists k \in \mathbb{N}$ $x_0 = a_0, x_1 = a_1, \dots, x_{k-1} = a_{k-1}, x_k > a_k$. Но последние соотношения противоречат построению числа a. Итак, a — мажоранта.

Докажем, что a — наименьшая мажоранта. Пусть $a' = a'_0, a'_1a'_2 \dots a'_n \dots$ — произвольное число, $a' < a$.

1. $a' < 0 \Rightarrow \forall x \in X$ $x > a'$.

2. $a' \geq 0$.

   $a' < a \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ $a'_0 = a_0, a'_1 = a_1, \dots, a'_{m-1} = a_{m-1}, a'_m < a_m$

   Из построения числа a: $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists x \in X$ $x_0 = a_0, x_1 = a_1, \dots, x_m = a_m$.

   Следовательно, $x > a'$.

Таким образом, a — наименьшая мажоранта. Получается, что $a = supX$. Аналогично доказывается теорема в том случае, когда $\forall x \in X$ $x < 0$.

Теорема 2 (о существовании нижней грани)**.** *У любого непустого ограниченного снизу множества существует нижняя грань.*

3 Вопрос

Счетные множества и их свойства.

Определение 1. *$A \sim B$, если $\exists f : A \to B$ взаимнооднозначное.*

Определение 2. *Если $A \sim \mathbb{N} \Rightarrow A$ – счетное множество.*

Теорема 1. *Всякое бесконечное подмножество счетного множества является счетным.*

Доказательство. Пусть множество A — счетное, B — его бесконечное подмножество.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$. Последовательно переберем $\forall n \in \mathbb{N}$ a_n. Если очередной элемент принадлежит также подмножеству B, ставим ему в соответствие некоторый номер $k \in \mathbb{N}$. Получим $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k, \dots\}$. Значит, множество B — счетно.

Теорема 2. *Объединение последовательности счетных множеств является счетным множеством.*

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ — последовательность счетных множеств.

$$\begin{gathered} A_1 = \{a_1^1, a_1^2, a_1^3, \dots\} \\ A_2 = \{a_2^1, a_2^2, a_2^3, \dots\} \\ A_3 = \{a_3^1, a_3^2, a_3^3, \dots\} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered}$$

Пусть $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Пронумеруем элементы нового множества следующим образом:

$$a_1 = a_1^1, a_2 = a_2^1, a_3 = a_1^2, a_4 = a_3^1, a_5 = a_2^2, a_6 = a_1^3, \ldots$$

Элементы, которые уже были включены в множество A пропускаются. В конечном счете, все элементы множества A будут занумерованы. Значит, A — счетное множество.

4 Вопрос

Теорема о несчетности интервала. Множества мощности континуума.

Теорема 1 (теорема о несчетности интервала)**.** *Множество всех точек интервала* $(0, 1)$ *несчетно.*

Доказательство. От противного. Пусть множество точек интервала $(0, 1)$ — счетное. Представляя каждое число этого интервала в виде бесконечной десятичной дроби, расположим их в виде последовательности

$$\begin{gathered} a_1 = 0, a_1^1 a_1^2 \ldots a_1^n \ldots, \\ a_2 = 0, a_2^1 a_2^2 \ldots a_2^n \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = 0, a_n^1 a_n^2 \ldots a_n^n \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Рассмотрим бесконечную десятичную дробь $b = 0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$, где $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n \neq a_n^n, 0, 9$. Очевидно, что $b \in (0, 1)$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ $b \neq a_n$. Получено противоречие. Множество точек $(0, 1)$ несчетно.

Определение 1. *Множество, эквивалентное множеству точек интервала* $(0, 1)$*, называется множеством мощности континуума.*

$$A \sim (0, 1) \Rightarrow A \text{— \textit{множество мощности континуума.}}$$

5 Вопрос

Ограниченные последовательности. Достаточное условие ограниченности последовательности.

Определение 1.

$$(x_n) \Leftrightarrow f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Определение 2. *Последовательность ограничена сверху* $\Leftrightarrow$

$$\exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \leq M.$$

Определение 3. *Последовательность ограничена снизу, если* $\Leftrightarrow$

$$\exists m \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \geq m.$$

Определение 4. $x_n = O(1) \Leftrightarrow$

$$\exists a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ a \leq x_n \leq b$$

или

$$\exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ |x_n| \leq M$$

Теорема 1 (достаточное условие ограниченности последовательности)**.** *Если* $\exists M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ |x_n| \leq M$*, то* $x_n = O(1)$.

Доказательство. Пусть $M' = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|, M\}$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ |x_n| \leq M'$, т.е. $x_n = O(1)$.

6 Вопрос

Определение 1. $x_n = o(1) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon\ |x_n| \leq \epsilon$

Теорема 1 (об арифметических действиях над бесконечно малыми последовательностями)**.**

$$o(1) \cdot o(1) = o(1) \tag{1}$$

$$o(1) \cdot O(1) = o(1) \tag{2}$$

$$\text{\textit{тем более }} o(1) \cdot o(1) = o(1) \tag{3}$$

Доказательство

Докажем равенство (1). $x_n = o(1), y_n = o(1), \epsilon$ — произвольное положительное число. Тогда

$$\exists n'_\epsilon\ \forall n \geq n'_\epsilon\ |x_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\exists n''_\epsilon\ \forall n \geq n''_\epsilon\ |y_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

Следовательно, для $\forall n \geq n_\epsilon = \max\{n'_\epsilon, n''_\epsilon\}$ выполняется условие

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Значит, $|x_n \pm y_n| = o(1)$

Докажем равенство (2). $x_n = o(1), y_n = O(1), \epsilon$ — произвольное положительное число. Тогда

$$\exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ |y_n| \leq M$$
$$\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon\ |x_n| < \frac{\epsilon}{M}$$

Следовательно,

$$\forall n \geq n_\epsilon\ |x_n y_n| \leq |x_n||y_n| < \frac{\epsilon}{M}M = \epsilon$$

Значит, $x_n y_n = o(1)$. А так как всякая бесконечно малая последовательность является ограниченной, $o(1) \cdot o(1) = o(1)$.

7 Вопрос

Бесконечно большие последовательности, их связь с бесконечно малыми.

Определение 1. (x_n) *называется положительно бесконечно большой, если*

$$\forall M > 0\ \exists n_M \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_M\ x_n > M$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Определение 2. (x_n) *называется отрицательно бесконечно большой, если*

$$\forall M > 0\ \exists n_M \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_M\ x_n < -M$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Определение 3. (x_n) *называется бесконечно большой, если*

$$\forall M > 0\ \exists n_M \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_M\ |x_n| > M$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Теорема 1 (связь бесконечно больших и бесконечно малых)**.** $\forall n \in \mathbb{N}\ (x_n \neq 0)$. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} = o(1)$.

Доказательство. Распишем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \exists M > 0\ n_M \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_m\ |x_n| > M$.

$$|x_n| > M \vdots |x_n|$$
$$1 > \frac{M}{|x_n|} \vdots M$$
$$\frac{1}{M} > \frac{1}{|x_n|}$$
$$\frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{M}$$

То есть $\frac{1}{M} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{1}{M}$. Значит, $\frac{1}{x_n} = o(1)$.

8 Вопрос

Предел последовательности. Теорема о единственности предела.

Определение 1. (x_n) — *сходящаяся, если* $\exists a \in \mathbb{R}$ $(x_n) - a = o(1)$. *Число* a *в этом случае называют пределом последовательности. Записывается это так:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

или

$$x_n \to a \text{ при } n \to \infty$$

Последовательности, не являющиеся сходящимися, называют расходящимися.

Определение 2. *Число* a *называется пределом последовательности* (x_n), *если*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_\epsilon \ |x_n - a| < \epsilon$$

Теорема 1 (о единственности предела)**.** *Если* $(x_n) - a = o(1) \Rightarrow \exists! a = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Доказательство. От противного. Пусть это не так. Тогда $\exists a_1 \ \exists a_2 \ a_1 \neq a_2 :$ $(x_n) - a_1 = o(1), \ (x_n) - a_2 = o(1)$. Решая систему уравнений, вычтем из первого равенства второе:

$$(x_n) - (x_n) - a_1 + a_2 = o(1) - o(1) \Leftrightarrow a_2 - a_1 = o(1)$$

В силу того, что $(a_2 - a_1)$ — стационарная и бесконечно малая последовательность, делаем заключение, что $a_2 - a_1 = 0 \Leftrightarrow a_2 = a_1$. Противоречие. Значит, $\exists! a$.

9 Вопрос

Ограниченность сходящейся последовательности

Теорема 1 (об ограниченности сходящейся последовательности)**.** *Если* $(x_n) - a = o(1) \Rightarrow (x_n) = O(1)$.

Доказательство. Пусть $(x_n) = a + o(1)$. Поскольку $o(1)$ ограничена, и стационарная последовательность a также ограничена, то $(a + o(1))$, по теореме об арифметических действиях над органиченными последовательностями, ограничена.

10 Вопрос

Порядковые свойства предела. Переход к пределу в неравенствах

Теорема 1. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $a > b$*, то*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ x_n > b$$

Аналогично, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $a < b$*, то*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ x_n < b$$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $\epsilon = \frac{a-b}{2}$. По определению предела

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ |x_n - a| < \frac{a-b}{2}$$

В силу того, что $\frac{a-b}{2} > 0$, запишем неравенство в следующем виде:

$$x_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} > b \Leftrightarrow \forall n \geq n_0\ x_n > b$$

Докажем второе утверждение. Пусть $\epsilon = \frac{b-a}{2}$. По определению предела

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ |x_n - a| < \frac{b-a}{2}$$

Поскольку $\frac{b-a}{2} > 0$,

$$x_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} < b \Leftrightarrow \forall n \geq n_0\ x_n < b$$

Теорема 2. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,\ a < b \Rightarrow$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ x_n < y_n$$

Доказательство. Возьмем число c такое, что $a < c < b$. Согласно предыдущей теореме,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_1\ x_n < c$$

и

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_2\ y_n > c$$

Тогда $\forall n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}\ x_n < c < y_n \Leftrightarrow x_n < y_n$

Теорема 3 (о переходе к пределу в неравенстве)**.** *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \leq y_n \Rightarrow a \leq b$

Доказательство. От противного. Пусть $a > b$. Тогда, по предыдущей теореме,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ x_n > y_n,$$

что противоречит условию. Поэтому $a \leq b$.

11 Вопрос

Порядковый признак существования предела последовательности.

Теорема 1 (порядковый признак существования предела)**.** *Если* $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n < z_n < y_n$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Доказательство. Пусть $\epsilon > 0$. По определению предела

$$\exists n'_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n'_\epsilon\ a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$$

$$\exists n''_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n''_\epsilon\ a - \epsilon < y_n < a + \epsilon$$

Тогда $\forall n \geq n_\epsilon = \max\{n'_\epsilon, n''_\epsilon\}\ a - \epsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \epsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

12 Вопрос

Арифметические свойства предела последовательности.

Теорема 1 (арифметические свойства предела последовательности)**.** *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *справедливо следующее:*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b,$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b},\ b \neq 0.$$

Доказательство. Согласно условию $x_n - a = o(1)$, $y_n - b = o(1)$.

1. $x_n \pm y_n = (a + o(1)) \pm (b + o(1)) = (a \pm b) + (o(1) + o(1)) = (a \pm b) + o(1)$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$.

2. $x_n y_n = (a + o(1))(b + o(1)) = ab + ao(1) + bo(1) + o(1)o(1) = ab + o(1)$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$.

3. Рассмотрим

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{y_n b}(bx_n - ay_n) = \frac{1}{y_n b}(b(a + o(1)) - a(b + o(1))) =$$
$$= \frac{1}{y_n b}(bo(1) - ao(1)) = \frac{1}{y_n b}o(1)$$

$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n b) = b^2 > \frac{b^2}{2}$. Согласно одной из теорем о порядковых свойствах предела, $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ y_n > \frac{b^2}{2}$, т.е. $0 < \frac{1}{y_n b} < \frac{2}{b^2}$. Следовательно, $\frac{1}{y_n b} = O(1)$. Тогда $\frac{1}{y_n b}o(1) = O(1)o(1) = o(1)$ и $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = o(1)$

По определению предела, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

13 Вопрос

Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса о монотонных последовательностях.

Определение 1

(x_n) *называется неубывающей, если* $\forall n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} \geq x_n$. $x_n \uparrow$.

(x_n) *называется невозрастающей, если* $\forall n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} \leq x_n$. $x_n \downarrow$.

Неубывающие и невозрастающие еще называют монотонными последовательностями.

Теорема 1 (Вейерштрасса о монотонных последовательностях). (x_n) *монотонная и* $x_n = O(1)$. *Тогда* (x_n) *сходится.*

Причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, *если* $x_n \uparrow$, *и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, *если* $(x_n) \downarrow$.

Доказательство. Докажем случай, когда $x_n \uparrow$. Так как $x_n = O(1) \Rightarrow \exists \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = a$.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \leq a$ и $\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ x_{n_\epsilon} > a - \epsilon$.

Так как $x_n \uparrow$, $\forall n \geq n_\epsilon\ a - \epsilon < x_{n_\epsilon} \leq x_n$.

Следовательно, $\forall \epsilon > 0\ \forall n \geq n_\epsilon\ a - \epsilon < x_{n_\epsilon} \leq x_n \leq a < a + \epsilon$ или

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon\ a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

Рассмотрим случай, когда $x_n \downarrow$. $x_n = O(1) \Rightarrow \exists \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = a$.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \geq a$ и $\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ x_{n_\epsilon} < a + \epsilon$.

Так как $x_n \downarrow$, $\forall n \geq n_\epsilon\ x_n \leq x_{n_\epsilon} < a + \epsilon$.

Следовательно, $\forall \epsilon > 0\ \forall n \geq n_\epsilon\ a - \epsilon < a \leq x_n \leq x_{n_\epsilon} < a + \epsilon$ или

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon\ a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$$

Значит, $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = a = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

Замечание 1. *Монотонная последовательность сходится $\Leftrightarrow$ она ограничена.*

14 Вопрос

Лемма о вложенных отрезках.

Лемма 1 (о вложенных отрезках). *У всякой стягивающейся последовательности отрезков существует, и притом единственная, точка, принадлежащая всем отрезкам последовательности.*

$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ *стягивающаяся* $\Rightarrow \exists! c\ \forall n \in \mathbb{N}\ c \in [a_n, b_n]$.

Доказательство. Рассмотрим (a_n). Очевидно, что $a_n \uparrow$ и $a_n = O(1)$, причем $\forall m \in \mathbb{N}\ b_m = M_a$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ и $\forall n \in \mathbb{N}\ c \in [a_n, b_n]$.

Докажем единственность (от противного). Пусть $\exists d\ d \neq c\ \forall n \in \mathbb{N}\ d \in [a_n, b_n]$. Пусть тогда $c < d$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ [c, d] \subset [a_n, b_n] \Leftrightarrow b_n - a_n > d - c > 0$, что противоречит условию $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$ (определение стягивающейся последовательности отрезков).

15 Вопрос

Подпоследовательности и частичные пределы последовательности. Теорема о подпоследовательностях сходящейся последовательности.

Определение 1. *Пусть x_n — числовая последовательность и (k_n) — некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $y_n = x_{k_n}$ называется подпоследовательностью последовательности (x_n).*

Теорема 1 (о подпоследовательностях сходящейся последовательности). *Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится, причем к тому же числу, что и вся последовательность.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} = a$ и $\epsilon > 0$. Тогда $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon$ $|x_n - a| < \epsilon$. Заметим, что k_n не может быть меньше n, а поэтому $k_n \geq n \geq n_\epsilon$. Значит, что для $y_n = x_{k_n}$ справедливо следующее: $\forall n \geq n_\epsilon\ |y_n - a| < \epsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

16 Вопрос

Верхний и нижний пределы последовательности. Корректность определения.

Определение 1. *Пусть $x_n = O(1)$.*

Верхний предел последовательности определяется равенством

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k$$

Нижний предел последовательности определяется равенством

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k$$

Докажем корректность этих определений, т.е. что они имеют смысл.

Для верхнего предела обозначим $y_n = \sup\limits_{k\geq n} x_k$. Очевидно, что $y_n = O(1)$, и, по свойству верхней грани, $y_n \downarrow$. Согласно теореме Вейерштрасса, (y_n) сходится.

Для нижнего предела обозначим $y_n = \inf\limits_{k\geq n} x_k$. $y_n = O(1)$, и, по свойству нижней грани, $y_n \uparrow$. По теореме Вейерштрасса, (y_n) сходится.

17 Вопрос

Свойства верхнего и нижнего пределов.

Теорема 1 (неофиц. порядковое свойство верхнего и нижнего пределов)**.** *Для любой $x_n = O(1)$ справедливо неравенство $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.*

Доказательство. Пусть $z_n = \inf\limits_{k\geq n} x_k,\ y_n = \sup\limits_{k\geq n} x_k$. Очевидно, что $\forall n \in \mathbb{N}\ z_n \leq y_n$. Значит, по теореме о переходе к пределу в неравенстве, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n \Leftrightarrow \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Теорема 2 (неофиц. признак сходимости ограниченной последовательности)**.** *У $x_n = O(1)$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$. Причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.*

Доказательство.

$\Rightarrow$. Распишем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon\ a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$$

Тогда справедливо следующее:

$$\forall k \geq n (\geq n_\epsilon)\ a - \epsilon < \inf_{k\geq n} x_k \leq x_n \leq \sup_{k\geq n} x_k < a + \epsilon$$

Или $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = a$.

$\Leftarrow$. Пусть $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = a$. Заметим, что $\forall n \in \mathbb{N}\ \inf\limits_{k\geq n} x_k \leq x_n \leq \sup\limits_{k\geq n} x_k$. По теореме о порядковом признаке существования предела $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

18 Вопрос

Теорема Больцано-Вейерштрасса.

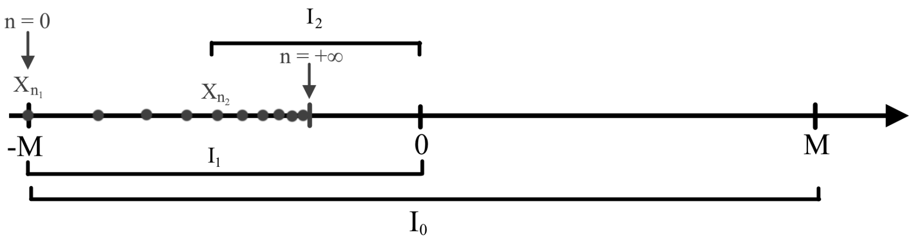
Теорема 1 (Больцано-Вейерштрасса)**.** *У любой $x_n = O(1)$ существует сходящаяся подпоследовательность.*

Доказательство. $x_n = O(1) \Leftrightarrow \exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ |x_n| \leq M$.

Разделим отрезок $I_0 = [-M, M]$ пополам. По крайней мере один из получившихся отрезков содержит бесконечное число членов (x_n). Выберем его и обозначим I_1. В качестве первого члена искомой посдпоследовательности выберем некоторый элемент $x_{n_1} \in I_1$.

Разделим отрезок I_1 пополам. Обозначим ту его часть, в которой содержится бесконечное число элементов (x_n), I_2. Из данного отрезка выберем такой член последовательности x_{n_2}, что $n_2 > n_1$.

Продолжая, мы в итоге получим последовательность вложенных отрезков (I_n), и подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$, причем $x_{n_k} \in I_k$.



Длина каждого отрезка I_k равна $\frac{2M}{2^k} = \frac{M}{2^{k-1}} \to 0$ при $k \to \infty \Rightarrow (I_k)$ является стягивающейся. По лемме о вложенных отрезках $\exists! c\ \forall k \in \mathbb{N}\ c \in I_k$. Обозначим $I_k = [a_k, b_k]$.

$a_k \to c,\ b_k \to c$ при $k \to \infty$, а $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \Rightarrow$ (по теореме о порядковом признаке существования предела) $x_{n_k} \to c$ при $k \to \infty$.

19 Вопрос

Фундаментальные последовательности. Теорема об ограниченности фундаментальных последовательностей.

Определение 1. (x_n) *называется фундаментальной, если*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon\ \forall m \geq n_\epsilon\ |x_n - x_m| < \epsilon$$

или если выполняется равносильное условие

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_\epsilon \ \forall p \in \mathbb{N} \ |x_{n+p} - x_n| < \epsilon$$

Теорема 1 (об ограниченности фундаментальной последовательности)**.** *Если* (x_n) *фундаментальная* $\Rightarrow x_n = O(1)$.

Доказательство. Пусть в условии фундаментальности $\epsilon = 1$. Тогда

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_1 \ |x_n - x_{n_1}| < 1$$

т.е. $\forall n \geq n_1 \ x_{n_1} - 1 \leq x_n \leq x_{n_1} + 1$. По теореме о достаточном условии ограниченности последовательности, $x_n = O(1)$.

20 Вопрос

Критерий Коши сходимости последовательности.

Теорема 1 (критерий Коши сходимости последовательности)**.** (x_n) *сходится* $\Leftrightarrow$ (x_n) *фундаментальна.*

Доказательство.
$\Rightarrow$. Пусть $(x_n) \to a$ при $n \to \infty$. Возьмем $\epsilon > 0$. Тогда $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$, такой, что

$$\forall n \geq n_\epsilon \ |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$$
$$\forall m \geq e_\epsilon \ |x_m - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

Следовательно,

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

То есть (x_n) фундаментальна.

$\Leftarrow$. Пусть (x_n) фундаментальна $\Rightarrow x_n = O(1)$. Тогда, по теорема Больцана-Вейерштрасса, существует сходящаяся подпоследовательность $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$. Пусть $x_{k_n} \to a$ при $n \to \infty$. Поскольку $k_n \geq n$, то из условия фундаментальности следует, что $x_n - x_{k_n} \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $x_n - a = (x_n - x_{k_n}) + (x_{k_n} - a) \to 0$, т.е. $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

21 Вопрос

Определения Гейне и Коши предела функции в точке. Теорема об эквивалентности.

Определение 1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$. Точка x_0 называется предельной точкой множества X, если в любой проколотой окресности точки x_0 есть точки множества X.*

Определение 2 (предела функции по Коши)**.** *Пусть функция f определена на множестве X и точка x_0 является предельной точкой множества X.*

Число A называют пределом функции в точке x_0, если

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \ (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon)$$

Формулой записывается так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Данное определение можно переформулировать, пользуясь понятием окрестности точки:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall O(A) \ \exists \mathring{O}(x_0) : \ f(\mathring{O}(x_0)) \subset O(A)$$

Определение 3 (предела функции по Гейне)**.** *Пусть функция f определена на множестве X и точка x_0 является предельной точкой множества X.*

Число A называют пределом функции f в точке x_0, если для любой последовательности (x_n) точек множества X такой, что $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ и $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \neq x_0$, выполняется условие $f(x_n) \to A$ при $n \to \infty$.

Теорема 1 (эквивалентность определений предела по Коши и по Гейне)**.** *Определение предела функции в точке по Коши равносильно определению предела по Гейне.*

Доказательство.

К $\Rightarrow$ Г. Пусть число A является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 по Коши и (x_n) — последовательность точек множества X, $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$.

Пусть $\epsilon > 0$. Согласно определению Коши, найдется число $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \epsilon$, если $0 < |x - x_0| < \delta$. Поскольку $x_n \to x_0$, то $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ |x_n - x_0| < \delta$, следовательно, $|f(x_n) - A| < \epsilon$. Это и означает, что $f(x_n) \to A$ при $n \to \infty$, т.е. функция f удовлетворяет определению Гейне.

Г $\Rightarrow$ К. Пусть число A является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 по Гейне. Докажем, что A является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 по Коши, от противного. Тогда

$$\forall \epsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta \in X \ (0 < |x_\delta - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_\delta) - A| \geq \epsilon_0)$$

Рассмотрим последовательность $\delta_n = \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}$, и найдем x_n такие, что

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n) - A| \geq \epsilon_0$$

Построенная последовательность $x_n \to x_0$ и $x_n \neq x_0$. Тогда согласно определению Гейне $f(x_n) \to A$, что противоречит условию $|f(x_n) - A| \geq \epsilon_0 > 0$. Получено противоречие. Значит, $\Gamma \Rightarrow$ К.