Контрольная работа №1 по математическому анализу для студентов ф-та КНиИТ, 1-ый семестр

Вычислить пределы

Задание 1

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+5)^3-n(n+7)^2}{n^2};\quad 2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n+1}-\frac{3n^2+1}{6n+1}\right);$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n^2+1)^2-(n^2-1)^2};\quad 4)\ \frac{(n^2+3n+4)^3-(n^2+3n-4)^3}{(n^2+5n+6)^3-(n^2+5n-6)^3};$$

$$5)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^3}{n^2+1}\right);$$

Задание 2

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}+n};\quad 2)\ \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n});$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}};\quad 4)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n\sin n!}{n\sqrt{n}+\sqrt{n+1}};\quad 5)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}+3^{n+3}}{2^n+3^n};$$

Задание 3

$$1)\ \lim_{x\to0}\frac{(1+x)^3-(1+3x+3x^2)}{x^4+x^3};\quad 2)\ \lim_{x\to1}\left(\frac{3}{1-x^3}+\frac{1}{x-1}\right);$$

$$3)\ \lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2};\quad 4)\ \lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}};\quad 5)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2x+1}};$$

Задание 4

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x};\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x};\quad 3)\ \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi^2-x^2};$$

$$4)\ \lim_{x\to\infty}x^2\Big(\cos\frac{1}{x}-\cos\frac{3}{x}\Big);\quad 5)\ \lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{\pi}{\cos x}-2x\operatorname{tg}x\right).$$

Задание 5

$$1)\ \lim_{x\to\infty}x^2\ln\cos\frac{\pi}{x};\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 5x}{\ln\cos 4x};\quad 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\sqrt{1+\sin x^2}-1};$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}(\ln(e+x))^{\operatorname{ctg}x};\quad 5)\ \lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-x)^{1/x}$$

Задание 6

1. Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = +\infty(-\infty)$, то последовательность (x_n) достигает своей нижней (верхней) грани.

2. Доказать, что сходящаяся последовательность достигает хотя бы одной из своих граней - верхней или нижней.

3. У последовательности (x_n) подпоследовательности (x_{2k}), (x_{2k-1}) и (x_{3k}) сходятся. Доказать, что сходится и сама последовательность.

4. Привести пример непрерывной функции, которая принимает значения, равные 1 и 3, но не принимает значения 2.